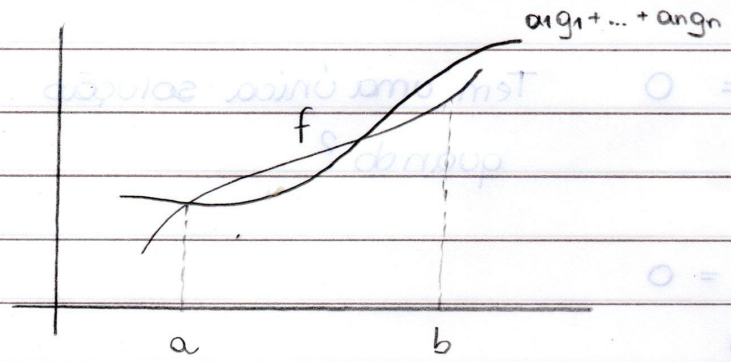
8ª semana

Numérico

MMQ caso contínuo



Dados $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ e $g_1, g_2, \dots, g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, queremos achar $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 \cdot g_1(x) + \dots + a_n \cdot g_n(x)$ aproxime $f(x)$ da melhor forma possível, de acordo com algum critério a ser definido.

$$\text{Erro}(a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \Big(f(x) - \underbrace{(a_1 g_1(x) + \dots + a_n \cdot g_n(x))}_{\text{polinômio de grau 2}}\Big)^2 dx$$

$\text{Erro}(a_1, \dots, a_n) = \| f(x) - a_1 g_1 - \dots - a_n g_n \|^2$ desde que você defina $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_a^b h_1(x) \cdot h_2(x)\, dx$

$\to \langle h_1, h_1 \rangle = \| h_1 \|^2 = \int_a^b h_1^2(x)\, dx$

→ Para acharmos o mínimo desse erro, o que fazemos?

* 1ª opção:

Note que o erro é pol. de grau 2 em $a_1, \dots, a_n$ e $\text{Erro} \geq 0$, $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Qualquer ponto crítico do erro é ponto de mínimo global logo o mínimo procurado, satisfaz: ↘

→ Satisfaz: $\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial a_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial E}{\partial a_n} = 0 \end{cases}$ Tem uma única solução quando?

→ $\dfrac{\partial E}{\partial a_i} = \dfrac{\partial}{\partial a_i}\left(\int_a^b (f(x) - a_1 g_1 - \dots - a_i g_i - \dots - a_n g_n)^2 dx\right)$

$\parallel$ parece e é verdade

$$\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial a_i}(f(x) - a_1 g_1 - \dots - a_i g_i - \dots - a_n g_n)^2\right) dx$$

└ de fato, vale o seguinte teorema:

Seja $F: \underbrace{[a,b]}_{x} \times \underbrace{[c,d]}_{y} \to \mathbb{R}$

tal que F é integrável com respeito a x e contínua com respeito a y, $\forall x \in [a,b]$ e $\forall y \in [c,d]$.

Então $\dfrac{\partial}{\partial y}\int_a^b F(x,y)\,dx = \int_a^b \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx$

$\therefore \dfrac{\partial E}{\partial a_i} = \int_a^b \left(\dfrac{\partial}{\partial a_i}(\quad)^2\right) dx$ como queríamos demonstrar.

$= \int_a^b 2.(f(x) - a_1 g_1 - a_2 g_2 - \dots - a_n g_n).(-g_i)\,dx$

e vamos igualar a zero

$\dfrac{\partial E}{\partial a_i} = 0$

$$\rightarrow \left(\int_a^b g_1(x).g_i(x)\,dx\right).a_1 + \dots + \left(\int_a^b g_n(x).g_i(x)\,dx\right).a_n =$$

$$= \left(\int_a^b f(x).g_i(x)\,dx\right) \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$$

- lembre que definimos $\langle h_1, h_2\rangle \overset{def.}{=} \int_a^b h_1(x).h_2(x)\,dx$

$\downarrow$

$$\langle g_1, g_i\rangle.a_1 + \dots + \langle g_n, g_i\rangle.a_n = \langle f, g_i\rangle$$

• Pensando geometricamente:

$f - a_1g_1 - a_2g_2 - \dots - a_ng_n$ é ortogonal ao subespaço gerado por $g_1, g_2, \dots, g_n$, por exemplo, se $f - a_1g_1 - \dots - a_ng_n$ for ortogonal a $g_1, g_2, \dots, g_n$.

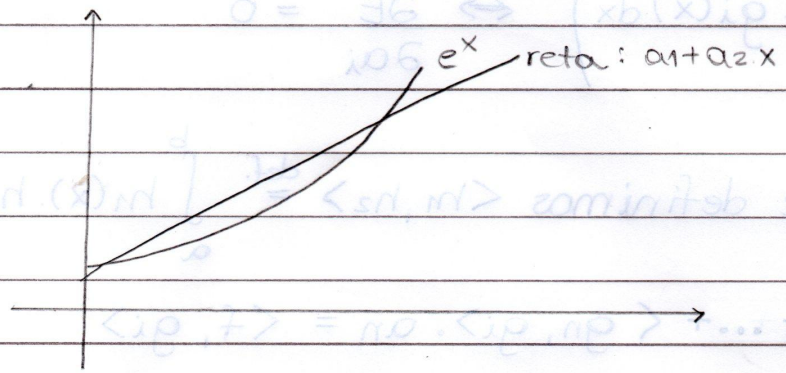
$$\langle f - a_1g_1 - \dots - a_ng_n, g_i\rangle = 0, \quad p/\ i = 1, 2, \dots, n$$

→ Então $(a_1, \dots, a_n)$ satisfaz:

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \dots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \dots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & & \\ \langle g_n, g_1\rangle & \dots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, g_1\rangle \\ \langle f, g_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f, g_n\rangle \end{pmatrix}$$

Exemplo: Ache a reta que melhor aproxima e^x no intervalo $[0,1]$ pelo M.M.Q.

Solução:



$$\text{Erro}(a_1, a_2) = \int_0^1 (e^x - a_1 - a_2 x)^2 dx$$

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, g_1 \rangle \\ \langle f, g_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \int_0^1 1.1 \, dx = 1 \qquad \langle g_2, g_2 \rangle = \int_0^1 x.x \, dx = 1/3$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^1 1.x \, dx = 1/2$$

$$\langle f, g_1 \rangle = \int_0^1 1.e^x dx = e - 1$$

$$\langle f, g_2 \rangle = \int_0^1 x.e^x dx = x.e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1.e^x dx = e - (e-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ lembre que (a_1, a_2) é o ponto onde Erro assume o menor valor.

Polinômios ortogonais

A ideia agora é, dado $\langle h_1, h_2 \rangle$, como construir uma base ortogonal com respeito a esse produto interno, para o polinômio de grau $\leq n$ para qualquer n dado.

Para ter menos trabalho, consideraremos polinômios mônicos, isto é, tais que o coef. do termo de maior grau será sempre 1.

→ polinômios ortogonais: caso contínuo

- Construa polinômios ortogonais até grau 2 no intervalo $[0,1]$.

Sol: $p_0(x) = 1$ $\quad p_1(x) = ax + b = -b(2x-1)$

↑ liberdade

$$0 = \langle p_1, p_0 \rangle = \int_0^1 (ax+b)\,dx = \frac{a}{2} + b \rightarrow \boxed{a = -2b}$$

$p_2(x) = c + bx + ax^2$

$$\langle p_2, p_0 \rangle = \int_0^1 (c + bx + ax^2)\,dx = 0$$

$$\boxed{c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3} = 0}$$

$$\langle p_2, p_1 \rangle = \int_0^1 (2x-1).(c + bx + ax^2)\,dx = 0$$

$$\boxed{-c + \frac{(2c-b)}{2} + \frac{2b-a}{3} + \frac{2a}{4} = 0}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ c + b/2 = -1/3 \\ -c + (2c-b)/2 + (2b-a)/3 + 2a/4 = 0 \end{cases}$$

→ Um jeito mais esperto de achar os polinômios ortogonais:

O objetivo é, dado um produto interno $\langle , \rangle$, construir polinômios ortogonais mônicos com respeito a esse $\langle , \rangle$.

pol. ort. mônicos: possuem → $1 \cdot x^n + \dots$

Sejam $p_0(x) = 1, p_1(x), \dots, p_k(x)$ os polinômios ortog. mônicos com respeito ao produto interno dado. Como achar $p_{k+1}(x)$? (grau $(p_i) = i$)

<u>Ideia</u>:

$$p_{k+1}(x) = x \cdot p_k(x) + \ ?$$

<u>Teorema</u>:

$$p_{k+1}(x) = x \cdot p_k(x) - (\alpha_{k+1}) \cdot p_k(x) - (\beta_{k+1}) \cdot p_{k-1}(x)$$

onde: $\alpha_{k+1} = \dfrac{\langle x \cdot p_k, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}$ e

$$\beta_k = \frac{\langle x \cdot p_k, p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}$$

$$\downarrow$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle x \cdot p_{k+1}, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}$$

<u>Prova</u>: Olhe para:

$p_{k+1}(x) - x \cdot p_k(x)$, tem grau $\leq k$

assim,

$$p_{k+1}(x) - x \cdot p_k(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \dots + \overbrace{a_{k-1}}^{-\beta_{k+1}} \cdot p_{k-1}(x) + \overbrace{a_k}^{-\alpha_{k+1}} \cdot p_k(x)$$

Temos que mostrar que $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{k-2} = 0$

Seja $0 \leq i \leq k-2$:

$$a_i = \frac{\langle p_{k+1} - x p_k, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}$$

$$\langle p_{k+1} - x.p_k \rangle = \overbrace{\langle p_{k+1}, p_i \rangle}^{0} - \langle x.p_k, p_i \rangle$$

$$\langle x p_k, p_i \rangle = \begin{cases} (*) & \text{se } \langle , \rangle \text{ for o discreto} \\ (**) & \text{se } \langle , \rangle \text{ for o contínuo} \end{cases}$$

$$(*) \quad \langle x.p_k, p_i \rangle = \sum_{l=0}^{n} x_l . p_k(x_l) . p_i(x_l)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} p_k(x_l) . (x_0 . p_i(x_l))$$

$$= \langle \underbrace{p_k}_{\text{polinômio ortogonal de grau } K}, \underbrace{x.p_i}_{\text{polinômio de grau } i+1 \leq K-1} \rangle = 0$$

$$(**) \quad \langle x p_k, p_i \rangle = \int_a^b x.p_k(x).p_i(x)\, dx$$

$$= \int_a^b p_k(x).(x.p_i(x))\, dx$$

$$= \langle p_k, x.p_i \rangle = 0$$

mesma razão do outro

Exemplo Dado $\langle p, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$, $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$, encontre $p_2(x)$ usando a fórmula anterior.

$$p_2(x) = x.p_1(x) - \alpha_2.p_1(x) - \beta_2.p_0(x) = x^2 - 1/3$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = \frac{1}{3}$$

Polinômios de Legendre e uso de tabelas

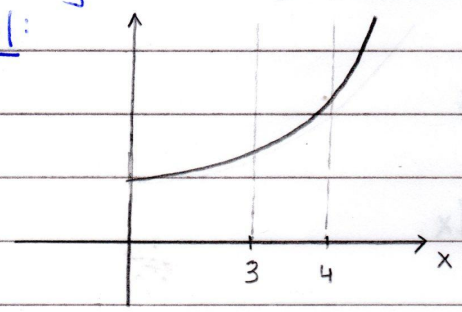
Polinômios de Legendre são polinômios ortogonais em $[-1,1]$ tais que $\langle p_i, p_i \rangle = \dfrac{2}{2i+1}$

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ \langle p_2, p_2 \rangle = \frac{2}{5}$$

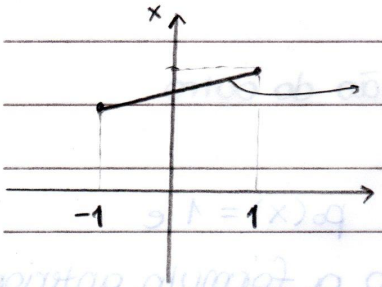
Exemplo de aplicações de tabela:

Aproxime $f(x) = e^x$ por um polinômio de grau ≤ 2, no intervalo $[3,4]$, pelo MMQ, usando a tabela do polinômio de Legendre.

Sol:



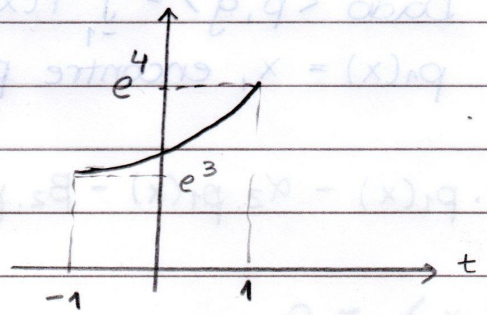
$$\begin{array}{ccccc} & & g(t) & & \\ & & \uparrow & & \\ & & [-1,1] & & \\ [-1,1] & \xrightarrow{x(t)} & [3,4] & \xrightarrow{e^x} & [e^3, e^4] \end{array}$$



$$x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{7}{2} = \frac{t+7}{2} \longrightarrow t = 2x-7$$

$$g(t) = e^{(t+7)/2}$$

$$g : [-1,1] \longrightarrow [e^3, e^4]$$



$$\text{Aproxime} \overset{MMQ}{\sim} \underbrace{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot \frac{1}{2}(3t^2-1)}_{t \in [-1,1]}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} e^{\frac{t+7}{2}} \cdot 1 \, dt \\ \int_{-1}^{1} e^{\frac{t+7}{2}} \cdot t \, dt \\ \int_{-1}^{1} e^{\frac{t+7}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3t^2-1) \, dt \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

Acha a_0, a_1, a_2

$$e^{\frac{t+7}{2}} \sim a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot \frac{1}{2}(3t^2-1), \quad t \in [-1,1]$$

$$e^x = e^{\frac{2x-7+7}{2}} \sim a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (2x-7) + a_2 \cdot \frac{1}{2}\left(3(2x+7)^2-1\right), \quad x \in [3,4]$$

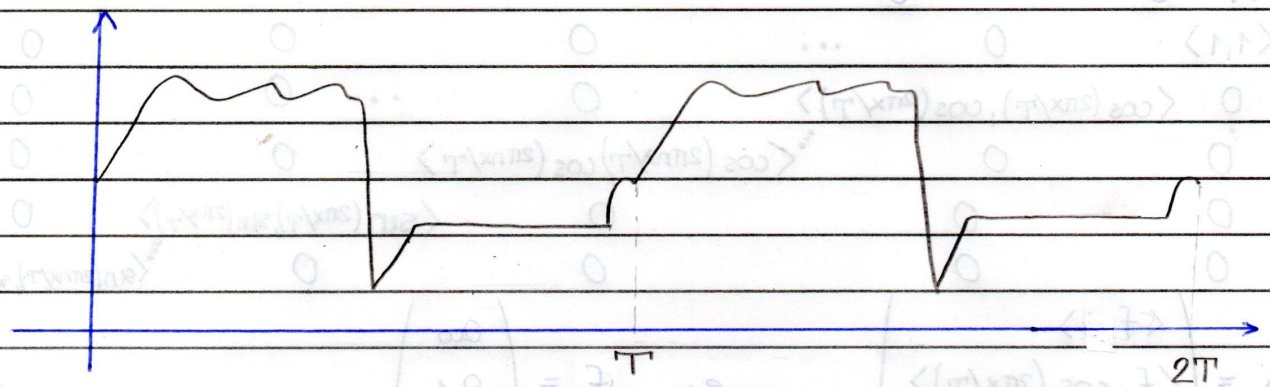
OBS

9a semana

D S T Q Q S S

Numérico

Séries de Fourier



Dada f, periódica, de período T, desejamos fazer o MMQ, aproximando f por uma combinação linear de:

$$1,\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}x\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{T}x\right),\ \dots,\ \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

→ Como fica o erro quadrático?

$$\text{Erro}(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) =$$

$$= \int_c^{c+T} \left(f(x) - \left(a_0 + a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + b_1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + \dots + a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right)\right)^2 dx$$

, $\forall c \in \mathbb{R}$ → c serve para facilitar as contas

O milagre aqui é o seguinte:
os vetores $\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}x\right), \dots, \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right\}$ são ortogonais, com respeito a

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_c^{c+T} h_1(x) \cdot h_2(x)\, dx$$

O que dá no seguinte sistema:

OBS

$A \times x = f$, sendo:

A:

$$A = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \cos(2\pi x/T), \cos(2\pi x/T)\rangle & & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \ddots \langle \cos(2\pi n x/T), \cos(2\pi n x/T)\rangle & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \operatorname{sen}(2\pi x/T), \operatorname{sen}(2\pi x/T)\rangle & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \langle \operatorname{sen}(2\pi n x/T), \operatorname{sen}(2\pi n x/T)\rangle \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} \langle f, 1\rangle \\ \langle f, \cos(2\pi x/T)\rangle \\ \vdots \\ \langle f, \cos(2\pi n x/T) \\ \langle f, \operatorname{sen}(2\pi x/T) \\ \vdots \\ \langle f, \operatorname{sen}(2\pi n x/T) \end{pmatrix} \quad e \quad x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

→ Mais ainda,

$$\langle 1,1\rangle = \int_c^{c+T} 1.1\, dx = T$$ e todos os outros dão $T/2$.

Assim, $a_0 = \dfrac{\int_c^{c+T} f(x)\, dx}{T}$ = valor médio de f.

$$a_i = \frac{2.\int_c^{c+T} f(x).\cos(2\pi i x/T)\, dx}{T}$$

$$b_i = \frac{2.\int_c^{c+T} f(x).\operatorname{sen}(2\pi i x/T)\, dx}{T}$$

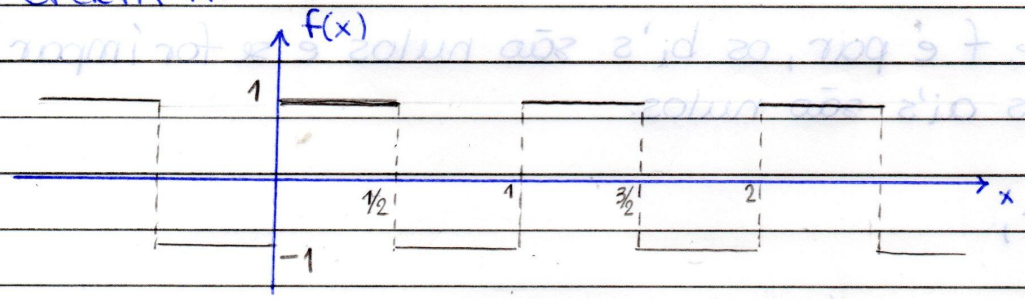
$\therefore$

$$\boxed{f(x) \sim a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.\cos\left(\frac{2\pi}{T} i x\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} i x\right)}$$ série de Fourier

OBS

Exemplo

Escreva a aproximação de $f(x)$ por Série de Fourier até ordem n.



Solução: $T = 1$, $\boxed{a_0 = 0}$

f é ímpar, isto é $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$a_i = 2 \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} \cdot \underbrace{\cos(2\pi i x)}_{\text{par}}}_{\text{ímpar}}\, dx = \boxed{0}$$

$$b_i = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \operatorname{sen}(2\pi i x)\, dx = 2 \cdot \left[\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi i x)\, dx - \int_{1/2}^1 \operatorname{sen}(2\pi i x)\, dx \right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{-\cos 2\pi i x}{2\pi i} \Bigg|_0^{1/2} + \frac{\cos 2\pi i x}{2\pi i} \Bigg|_{1/2}^1 \right] = 2 \left[\frac{1}{2\pi i} \left(-\cos \pi i + 1 + 1 - \cos \pi i \right) \right] =$$

$$\boxed{b_i = \frac{2}{\pi i} (1 - \cos \pi i)}$$

$$\begin{cases} \text{se } i \text{ é ímpar}, & b_i = 4/\pi i \\ \text{se } i \text{ é par}, & b_i = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen}(6\pi x) + \frac{4}{3\pi} \cdot \operatorname{sen}(10\pi x) + \dots$$

OBS

Série de Fourier de funções pares e ímpares

→ Lema: Se f é par, os b_i's são nulos e se for ímpar, os a_i's são nulos.

→ Se f é par,

$$b_i = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x).\,\text{sen}\,(2\pi x/T)}_{\text{ímpar}}\,dx = 0$$

→ Se f é ímpar,

$$a_i = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(x).\,\cos(2\pi i x/T)}_{\text{ímpar}}\,dx = 0$$

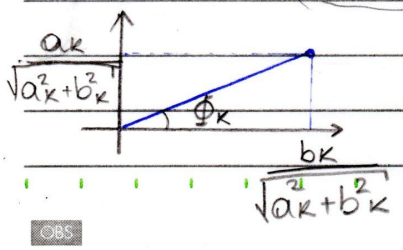
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ímpar}}}{f(x)}\,dx = 0$$

→ Sobre a fase das harmônicas (e a amplitude também)

O harmônico de ordem k é dado por:

$$a_k \cos(2\pi k x/T) + b_k\,\text{sen}\,(2\pi k x/T) = \underbrace{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}_{\text{amplitude}}.\,\text{sen}(2\pi k x/T + \overbrace{\phi_k}^{\text{fase}})$$

$$= \sqrt{a_k^2+b_k^2}.\left(\overbrace{\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}}^{=\,\text{sen}(\phi_k)}.\cos(2\pi k x/T) + \underbrace{\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}}_{\cos(\phi_k)}.\,\text{sen}\,(2\pi k x/T)\right)$$



Séries de Fourier Discretas

Supondo que você receba uma tabela, onde $x_i = \frac{\pi}{N} \cdot i, i \in \{1, \dots, 2N\}$ onde $N \in \mathbb{N}^*$ qualquer.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_{2N}	y_{2N}

$\frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}, \frac{3\pi}{N}, \dots, 2\pi$

2π

E é sabido, por alguma razão, que os y's devem se comportar de forma periódica com x, com período 2π.

Desejamos, como no caso contínuo, aproximar a tabela anterior, por algo de forma:

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \operatorname{sen} x + \dots + a_{N-1} \cdot \cos((N-1)x) + b_{N-1} \cdot \operatorname{sen}((N-1)x) + a_N \cos(Nx)$$

Como antes (no caso contínuo), as nossas escolhas implicam que os vetores:

$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \cos(N-1)x, \operatorname{sen}(N-1)x, \cos(Nx)$ são ortogonais com respeito a:

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \sum_{i=1}^{2N} h_1(x_i) \cdot h_2(x_i)$$

$$\langle \operatorname{sen} jx, 1 \rangle = \sum_{i=1}^{2N} \operatorname{sen}\left(j \frac{\pi}{N} i\right) = 0$$

$$\langle \cos jx, 1 \rangle = \sum_{i=1}^{2N} \cos\left(j \frac{\pi}{N} \cdot i\right) = 0$$

$\langle \cos jx, \operatorname{sen} ix \rangle = 0$, por que?

cos qualquer e sen qualquer

OBS

(PARÊNTESES)

Por que os vetores
$1, \cos\frac{2\pi}{T}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}x, \dots, \cos\left(\frac{2\pi N}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi N}{T}x\right)$ são ortogonais no caso contínuo?

$$\left\langle \cos\left(\frac{2\pi i}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle \cos\left(\frac{2\pi i}{T}x\right), 1\right\rangle = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi i x}{T}\right)dx = 0$$

$$\left\langle \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{T}x\right), 1\right\rangle = \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)dx = 0$$

$$\left\langle \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{T}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)\right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ T/2, & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\left\langle \cos\left(\frac{2\pi i}{T}x\right), \cos\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)\right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ T/2, & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\rightarrow \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a.\cos b + \operatorname{sen}b.\cos a$

$\operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen}a\cos b - \operatorname{sen}b.\cos a$

$\operatorname{sen}a\cos b = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right)$

$\downarrow$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi i}{T}x.\cos\frac{2\pi j}{T}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(i+j)}{T}x\right) + \frac{1}{2}.\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(i-j)}{T}x\right)$$

$$\cos^2\frac{2\pi i}{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi i}{T}x\right) \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\cos 2\theta$$

$$\left\langle \cos\left(\frac{2\pi i}{T}x\right), \cos\left(\frac{2\pi i}{T}x\right)\right\rangle = \int_0^T \cos^2\frac{2\pi i}{T}x\,dx$$

OBS

Voltando, já sabemos, no caso discreto, que:

$$\sum_{i=1}^{2N} \text{sen ou cos}\,(j \cdot X_i) = 0 \quad , \quad p/\ \forall j \in \mathbb{N}$$

$\rightarrow x_{j+N} = x_j + \pi$

$$\langle 1,1 \rangle = \sum_{i=1}^{2N} 1.1 = 2.N$$

$$\underset{1 \leq j \leq N}{\langle \cos jx, \cos jx \rangle} = \sum_{i=1}^{2N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2jx_i\right) = \begin{cases} 2N, & \text{se } j = N \\ N, & \text{se } j < N \end{cases}$$

$$x_i = \frac{\pi}{N} i$$

Logo, $a_0 = \dfrac{\langle y, 1 \rangle}{2N}$

$1 \leq j \leq N-1$: $a_j = \dfrac{\langle y, \cos jx \rangle}{N}$

$$a_N = \frac{\langle y, \cos Nx \rangle}{2N}$$

$1 \leq j \leq N-1$ $\quad b_j = \dfrac{\langle y, \text{sen}\, jx \rangle}{N}$

Sistema normal:

$$\begin{pmatrix} 2N & & & & & \\ & N & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & N & & \\ & & & & 2N & \\ & 0 & & & & N \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, 1 \rangle \\ \langle y, \cos x \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \cos Nx \rangle \\ \langle y, \text{sen}\, x \rangle \\ \vdots \\ \langle y, \text{sen}\,(N-1)x \rangle \end{pmatrix}$$

Exemplo (para pensar) Faça a análise harmônica da tabela abaixo até o 1º harmônico.

x	y
$\pi/2$	3
π	5
$3\pi/2$	7
2π	6

$N = 2$

$a_0 + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \operatorname{sen} x$

Família de funções não lineares nos parâmetros

$f(x), x \in [a, b]$

$\underset{\text{tabela}}{y} \sim a_0 \cdot e^{a_1 x}$

$$\text{Erro}(a_0, a_1) = \int_a^b \left(f(x) - a_0 \cdot e^{a_1 x}\right)^2 dx$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= \int_a^b 2 \cdot (\ ) \cdot e^{a_1 x}\, dx = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= \int_a^b 2 \cdot (\ ) \cdot a_0 \cdot e^{a_1 x} \cdot x\, dx = 0 \end{aligned}\right\} \text{desistimos deste enfoque e...}$$

Se $\underset{y}{f(x)} \overset{\text{é aprox.}}{\sim} a_0 \cdot e^{a_1 x}$, então

$\underset{\ln y}{\ln f(x)} \sim \ln(a_0 \cdot e^{a_1 x}) = \ln a_0 + a_1 \cdot x = a_0' + a_1' \cdot x$

onde: $a_0 = e^{a_0'}$

e $a_1 = a_1'$

Faça agora a regressão linear para:

$\underset{\text{ou } f(x)}{\ln(y)}$, ache a_0', a_1', ache a_0 e a_1 e acabou

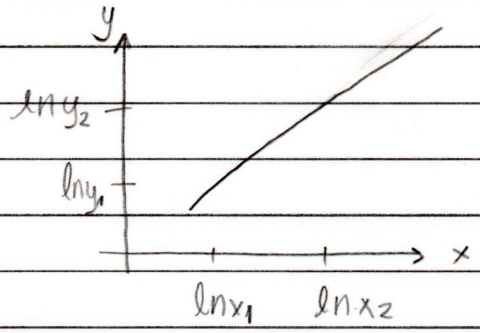
Exemplo 2

$f(x)$

ou $\sim$ $a_0 . x^{a_1}$

y

tire ln dos dois lados



$\ln y \sim \ln a_0 + a_1 . \ln x = a_0' 1 + a_1' . \ln x$, onde

$\ln f(x)$ $\qquad a_0 = e^{a_0'}$ e $a_1' = a_1$

x	y
1	2
22	45
38	9

$\ln x$	$\ln y$
0	$\ln 2$
$\ln 22$	$\ln 45$
$\ln 38$	$\ln 9$

$\langle \underset{g_1}{1}, \underset{g_2}{\ln x} \rangle$

Exemplo 3

$f(x) \sim \dfrac{x}{ax+b}$

y

tome a inversa dos 2 lados

$1/f(x) \sim \dfrac{ax+b}{x} = a . \underset{g_1}{1} + b . \underset{g_2}{\dfrac{1}{x}}$

$1/y$

Exemplo 4

$y \sim \dfrac{a+bx}{1+dx}$

$y + d . y . x \sim a + bx$

$y \sim a . \underset{g_1}{1} + b . \underset{g_2}{x} + d . \underset{g_3}{(-x . y)}$, agora faça MMQ e acabou

$\langle g_3, g_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} -x_i . y_i . x_i$

OBS

Numérico

Interpolação Polinomial

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

(*) $n+1$ pontos

Dada uma tabela como a anterior, queremos achar um polinômio de grau menor possível, que interpole a tabela, isto é, em $x = x_i$, o polinômio vale y_i. Como encontrá-lo? Ele é bem definido?

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$n = 4$

→ Teorema: existe um único polinômio de grau $\leq n$ que interpole a tabela (*).

→ Prova:

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n . x^n$ um polinômio de grau $\leq n$, que vamos impor que interpole a tabela (*).

Logo deve valer:

$$p(x_i) = y_i, \quad p/\ i = 0, 1, \ldots, n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(x_i, y_i) vem da tabela, as incógnitas são os a_i's.

Temos que mostrar que o sistema acima tem uma única solução.

Isto é equivalente a mostrar que o determinante $\neq 0$.

OBS

Vamos, por absurdo, supor que ele seja zero.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tem solução diferente de } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, existe $\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tal que

$b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \dots + b_3 . x_i^2 = 0, \quad p/\ i = 0, 1, 2, \dots, n$

$q(x) = b_0 + b_1 x_i + \dots + b_n x^n \rightarrow \text{grau}(q(x)) \leq n.$

Chegamos então que $q(x)$ tem pelo menos $n+1$ raízes e grau $\leq n$. Logo, temos pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $q(x) \equiv 0$. Isto é um absurdo, pois suposemos que $\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$q(x)$ não nulo.

Exemplo Dada a tabela:

x	y
1	1
2	2
4	-1
5	0

o polinômio interpolador é da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 . x^2 + a_3 . x^3$$

e pode ser obtido de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Polinômio Interpolador na forma de Lagrange

Dada a tabela:

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

queremos achar o polinômio interpolador de uma forma mais direta.

Obs: o polinômio interpolador de uma tabela é único, o que estamos fazendo é mostrar diferentes algoritmos para achá-lo.

Queremos, para isso, achar o polinômio de grau $\leq n$, $L_i(x)$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$ tais que:

$$L_i(x_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$L_i(x_i) = 1$$

Fixe $i \in \{0,1,\dots,n\}$.

$$\underbrace{L_i(x)}_{\text{núcleo de Lagrange}} = \frac{(x-x_0).(x-x_1)\dots(x-x_{i-1}).(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0).(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1}).(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

∴ o polinômio interpolador é dado por:

$$\boxed{y_0 . L_0(x) + y_1 . L_1(x) + \dots + y_n . L_n(x)}$$

Exemplo

x	y
1	3
2	6
3	9
4	12

$$P(x) = 3.\frac{(x-2).(x-3).(x-4)}{(1-2).(1-3).(1-4)} + 6.\frac{(x-1).(x-3).(x-4)}{(2-1).(2-3).(2-4)} + 9.\frac{(x-1).(x-2).(x-4)}{(3-1).(3-2).(3-4)} + 12.\frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{(4-1).(4-2).(4-3)} = \boxed{3x},$$

$n = 3$

OBS

→ Polinômio Interpolador na forma de Newton

A ideia agora é, dada uma tabela:

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

, achar o polinômio interpolador de forma recursiva, considerando tabelas cada vez maiores.

1º)

x	y
x_0	y_0

$p_0(x) = x_0$

2ª)

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1

$$p_1(x) = p_0(x) + f[x_0, x_1].(x - x_0)$$
$$= y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right).(x - x_0)$$

$\vdots$

iº)

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_i	y_i

$p_i(x)$

Como achar o $p_{i+1}(x)$?

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) + \overbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_{i+1}]}^{\text{número}}.(x - x_0).(x - x_1).\dots.(x - x_i)$$

→ para determinar $f[x_0, x_1, \dots, x_{i+1}]$, devemos impor que:

$$p_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$\Downarrow$$
$$f[x_0, x_1, \dots, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - p_i(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_0).(x_{i+1} - x_1)\dots(x_{i+1} - x_i)}$$

A conta anterior veio de:

$$y_{i+1} = p_i(x_{i+1}) + f[x_0, x_1, \dots, x_{i+1}] \cdot (x_{i+1} - x_1) \dots (x_{i+1} - x_i)$$

$$\parallel$$

$$p_{i+1}(x_{i+1})$$

$\therefore$

$$p_n(x) = \overbrace{f[x_0]}^{y_0} + \overbrace{f[x_0, x_1]}^{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots +$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Necessitamos de um algoritmo eficiente para calcular os $f[\cdot, \cdot, \dots, \cdot]$.

← diferenças divididas

Exemplo Dada a tabela abaixo, encontre o polinômio interpolador na forma de Newton:

x	y
2	5
3	10
5	26
6	37
8	65

$$\begin{array}{ccccc}
5 & \frac{10-5}{3-2} = 5 & \frac{8-5}{5-2} = 1 & \frac{1-1}{6-2} = 0 & \frac{0-0}{8-2} = 0 \\
10 & \frac{26-10}{5-3} = 8 & \frac{11-8}{6-3} = 1 & \frac{1-1}{8-3} = 0 & \\
26 & \frac{37-26}{6-5} = 11 & \frac{14-11}{8-5} = 1 & & \\
37 & \frac{65-37}{8-6} = 14 & & & \\
65 & & & &
\end{array}$$

Tabela de diferenças divididas

$$p(x) = f[2] + f[2,3] \cdot (x-2) + f[2,3,5] \cdot (x-2)(x-3) + \overbrace{f[2,3,5,6]}^{0} \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) +$$
$$+ \underbrace{f[2,3,5,6,8]}_{0} \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x-6) = x^2 + 1$$

→ (calma, olha a próxima página)

→ Tabela de diferenças divididas

x	$y = f[x_0]$			
x_0	y_0			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	y_1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	y_2		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	y_3			

• Regra: $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] \overset{def.}{=} \dfrac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$

ou seja

ex: $f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$

essa é a lei de formação de dif. divididas.

• Teorema (lembrando do polinômio interpolador)

$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1].(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2].(x - x_0).(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3].(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$

Usa as diferenças divididas (nem todas entram no polinômio, mas precisamos calcular todas para achar a última).

• Teorema: Assumindo que o polinômio interpolador esteja escrito na forma anterior, então as diferenças divididas satisfazem a regra dada anteriormente.

- Verificação no caso $n = 2$:

Queremos mostrar que: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

OBS

$$
\begin{array}{lll}
x_0 & y_0 & \\
 & & \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \\
x_1 & y_1 & \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \\
 & & \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
x_2 & y_2 &
\end{array}
$$

Agora, vamos escrever $p(x)$:

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)}\cdot(x-x_0) + \frac{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)}{x_2-x_0}\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)$$

Verifiquemos que $p(x)$ interpola a tabela:

$p(x_0) = y_0$ ✓ (o resto se anula)

$p(x_1) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{\cancel{(x_1-x_0)}}\cdot\cancel{(x_1-x_0)}$ (o último termo se anula)

$p(x_1) = y_1$ ✓

$$p(x_2) = y_0 + \frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)}\cdot(x_2-x_0) + \frac{\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)}{\cancel{(x_2-x_0)}}\cdot(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)$$

$$= y_0 + \left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)\cdot\left((x_2-x_0)-\cancel{(x_2-x_1)}\right) + \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\cdot(x_2-x_1) - \cancel{\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)\cdot(x_2-x_1)}$$

$$= y_0 + (y_1-y_0) + (y_2-y_1) = y_2 \checkmark \quad \text{c.q.d.}$$

→ A mesma estratégia poderia ser usada para tabelas de qualquer tamanho, basta ter paciência.

OBS

→ Chame de $p_i(x)$ o pol. interpolador de

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_i	y_i

E chame de $p_j^i(x)$ o pol. interpolador de

x	y
x_i	y_i
$\vdots$	$\vdots$
x_j	y_j

Ambos podem ser obtidos da tabela de diferenças original,

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

da seguinte forma:

$(n > j)$

Obs: tabelas tem que estar na ordem da tab. original e sem pular nenhuma linha da original

Ex: (tabela de dif. divididas)

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \quad f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1,x_2] & f[x_1,x_2,x_3] & f[x_1,x_2,x_3,x_4] \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2,x_3] & f[x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f[x_3] & f[x_3,x_4] & & \\
x_4 & f[x_4] & & &
\end{array}
$$

atenção, são índices

$$p_4^2(x) = f[x_2] + f[x_2,x_3].(x-x_2) + f[x_2,x_3,x_4].(x-x_2).(x-x_3)$$

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1].(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2].(x-x_0).(x-x_1)$$

Exemplo Encontre o polinômio interpolador da tabela:

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

$p(x) = 2x$, pois $2x$ interpola a tabela e tem grau ≤ 3, logo ele é o polinômio interpolador.

Vamos acrescentar o ponto $(0,3)$ na tabela e achar o novo $p(x)$

1	2	2	0	0		$\frac{-1/8}{-1} = \frac{1}{8}$
2	4	2	0	$\frac{1/4}{0-2} = -\frac{1}{8}$		
3	6	2	$\frac{1}{4}$			
4	8	$\frac{5}{4}$				
0	3					

$$\boxed{p(x) = 2x + \frac{1}{8}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

Não precisa por no começo

→ Tabelas com pontos igualmente espaçados

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

Suponha que $\exists\, h>0$ tal que cada
$x_i = x_{i-1} + h = x_0 + i.h$, p/ $i = 0, 1, \dots, n$

Nesta situação é razoável olhar para as chamadas diferenças simples.

<u>Def</u>: Dada uma função $f(x)$ e $h>0$, $\Delta f(x_0) \overset{def.}{=} f(x_0+h) - f(x_0)$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_0+h) - \Delta f(x_0)$$

$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0+h) - \Delta^2 f(x_0)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_0+2h) - f(x_0+h) - (f(x_0+h) - f(x_0))$$
$$= f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)$$

$$\Delta^3 f(x_0) = f(x_0+3h) - 2f(x_0+2h) + f(x_0+h) - (f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0))$$
$$= f(x_0+3h) - 3f(x_0+2h) + 3f(x_0+h) - f(x_0)$$

→ Mais geralmente:

$$\boxed{\Delta^i f(x_0) = \Delta^{i-1} f(x_0+h) - \Delta^{i-1} f(x_0)}$$

Por que olhar para isso?

	$f(x_0)$			
x_0	y_0	$y_1 - y_0$	$y_2 - 2y_1 + y_0$	$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$
x_0+h	y_1	$y_2 - y_1$	$y_3 - 2y_2 + y_1$	
x_0+2h	y_2	$y_3 - y_2$		
x_0+3h	y_3			
	$f(x_0+3h)$			

Tabela de dif. simples:

x_0	y_0	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$
x_0+h	y_1	$\Delta f(x_0+h)$	$\Delta^2 f(x_0+h)$	
x_0+2h	y_2	$\Delta f(x_0+2h)$		
x_0+3h	y_3			

• Teorema:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{\Delta^{j-1} f(x_0 + i.h)}{(j-1)!\ h^{j-i}}$$

x_0	y_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_0+h	y_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_0+2h	y_2	$f[x_2, x_3]$		
x_0+3h	y_3			

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\ h^2}$$

Exemplo:

x	y			
1	2	3	-5	15
2	5	-2	10	
3	3	8		
4	11			

$(h=1)$

$$\rightarrow p(x) = 2 + \frac{3}{1!\ 1^1}.(x-1) + \frac{-5}{2!\ 1^2}(x-1)(x-2) + \boxed{+ \frac{15}{3!\ 1^3}.(x-1).(x-2).(x-3)}$$

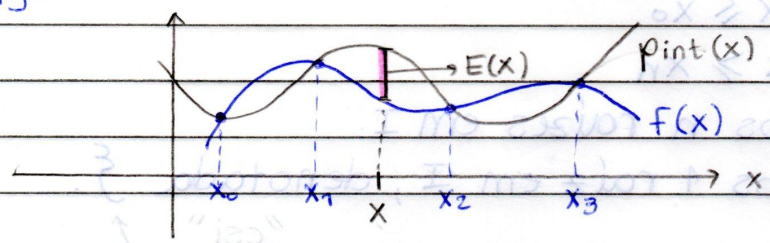
OBS

Erro na Interpolação Polinomial

Suponha que você tem uma tabela onde os y_i's são iguais a $f(x_i)$ onde $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

Queremos olhar p/ $\underbrace{E(x)}_{\text{erro}} = f(x) - p_{int}(x)$ e estimar o seu valor para diversos valores de x.



O nosso objetivo é encontrar uma estimativa do $E(x)$, sem conhecer o polinômio interpolador, apenas a partir da tabela. Para isso, vamos definir algumas funções.

$$G(x) \overset{def.}{=} (x-x_0).(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

A partir de agora, fixe um $x \in \mathbb{R}$ e olhemos para a função:

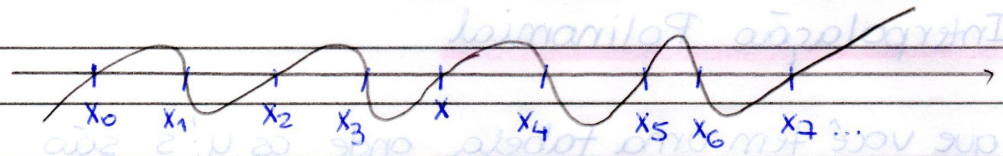
$$H(t) = E(x).G(t) - E(t).G(x), \quad \text{com } t \in \mathbb{R}$$

- Queremos estimar o número de zeros de $H(t)$.

É claro que H se anula em $t \in \{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$, portanto H tem pelo menos $n+2$ raízes.

Hip: Suponha que f (a função que gerou a tabela) é muitas vezes derivável, com derivadas contínuas.

OBS



→ H' tem pelo menos $n+1$ raízes em I, onde I é o menor intervalo possível que contiver $x_0, x_1, \dots, x_n$ e x.

$$I = \begin{cases} [x_0, x_n] & \text{se } x_0 \leq x \leq x_n \\ [x, x_n] & \text{se } x \leq x_0 \\ [x_0, x] & \text{se } x \geq x_n \end{cases}$$

→ H'' tem pelo menos n raízes em I.

→ H^{n+1} tem pelo menos 1 raíz em I, denotada ξ.

"csi"

letra grega feia

$$H^{n+1}(t) = E(x) \cdot \underbrace{G^{n+1}(t)}_{= (n+1)!} - \underbrace{E^{n+1}(t)}_{= f^{n+1}(t) - \underset{\substack{\equiv \\ 0}}{p_{int}^{n+1}(t)}} \cdot G(x)$$

$p_{int}(x)$ por

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

tem grau $\leq n$.

→ Faça $t = \xi$:

$$0 = H^{n+1}(\xi) = E(x) \cdot (n+1)! - f^{n+1}(\xi) \cdot (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{f^{n+1}(\xi) \cdot (x - x_0) \dots (x - x_n)}{(n+1)!}$$

para algum ξ que não conhecemos.

Assim, para usar a expressão acima, fazemos o seguinte:

$$|E(x)| \leq \frac{\max |f^{n+1}(t)| \cdot |(x-x_0)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!}, \text{ p/ } t \in I$$

Exemplo Queremos aproximar $f(x) = e^{3x}$ por um polinômio em $[-10,10]$. Para isto, vamos dividir o intervalo $[3,5]$ em $n+1$ pontos, $x_0 = 3$ e $x_n = 5$, igualmente espaçados e a partir da tabela construímos o $p_{int}(x)$. Encontre n, tal que $|f(x) - p_{int}(x)| < 10^{-3}$, $\forall x \in [-10,10]$.

x	y
$3 = x_0$	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$
$5 = x_n$	$f(x_n)$

Sol:

$I = [-10,10]$

$f(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$

$f''(x) = 3^2 \cdot e^{3x}$

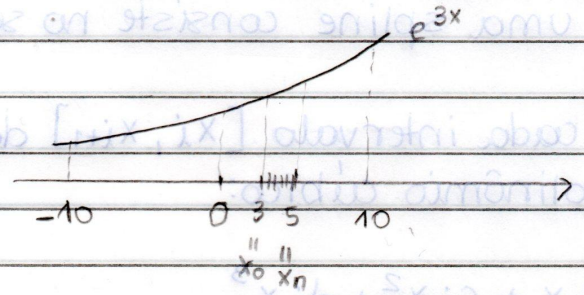
$\vdots$

$f^{n+1}(x) = 3^{n+1} \cdot e^{3x}$

$x = 10$ pois tem a maior derivada (olhar graf.)

$$|E(x)| \leq \frac{3^{n+1} \cdot e^{30} \cdot 15^{n+1}_{(*)}}{(n+1)!} = \frac{45^{n+1} \cdot e^{30}}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

Achamos n dessa desigualdade



(*) poderia pegar 20 (tamanho do intervalo), mas sabemos que $(x - x_i)$ vão ser sempre menores que 15.

↳ Por que? x_i está entre 3 e 5 e x entre -10 e 10, então a maior distância é 15.

Exemplo Queremos construir uma tabela onde $x_0 = 1/2$, $x_n = 1$ e $y_i = f(x_i) = 1/x_i$, com $f(x) = 1/x$ e depois aprox. a tabela pelo seu polinômio interpolador, $p_{int}(x)$ e olhar para $E(x) = f(x) - p_{int}(x)$, com $x \in [1/2, 1]$. É verdade que $|E(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$?, $x \in [1/2, 1]$.

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

Sol:

$f(x) = 1/x$

$f'(x) = -1/x^2$

$f''(x) = 2/x^3$

$f'''(x) = -6/x^4$

$\vdots$

$f^n(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$

$t \in [1/2, 1]$ $\quad (n^n \sim \sqrt{2\pi n}\, n!)$

$$|E(x)| \geq \frac{\min|f^{n+1}(t)| \cdot |(x-x_0)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} =$$

$= (n+1)!$

$$|E(x)| = |(x-x_0)\cdot(x-x_1)\dots(x-x_n)| \not\to 0$$

R: Não.

Splines

Interpolar uma tabela da forma

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

por uma spline consiste no seguinte:

Em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ devemos determinar um polinômio cúbico:

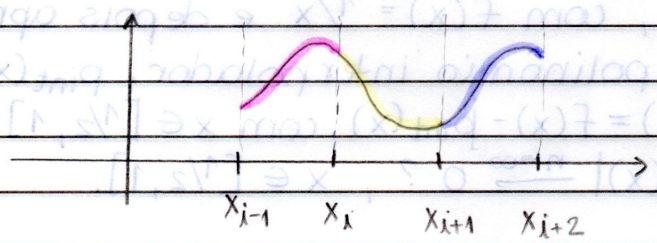
$$p_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

de forma que:

$$\left.\begin{array}{l} p_i(x_i) = y_i \\ p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{array}\right\} \text{continuidade da spline}$$

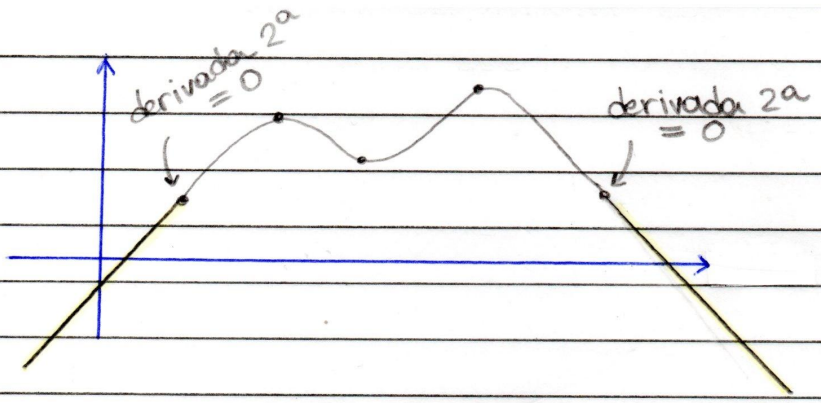
e

$$\left.\begin{array}{l} p'_i(x_i) = p'_{i-1}(x_i) \\ p'_i(x_{i+1}) = p'_{i-1}(x_i) \end{array}\right\} \text{colagem da derivada}$$



OBS

(Professor confuso, ta explicado bonitinho mais pra frente)



A spline natural impõe que $p_0''(x_0) = p_{n-1}'' = 0$
(derivadas 2ªs dos extremos = 0, dá em retas - "modo de menor """energia""""")

→ Na spline forçada, impõem-se valores para:

$$\underset{\substack{\parallel \\ V_0}}{p_0'(x_0)} \quad e \quad \underset{\substack{\parallel \\ V_n}}{p_{n-1}'(x_n)}$$

Numérico

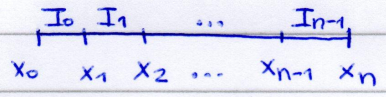
Splines

↳ Relembrando

Ao construirmos uma spline por uma tabela, se estivermos usando polinômio de grau 3 (spline cúbica), temos:

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$n+1$ pontos



Os $n+1$ pontos geram n intervalos.

$$I_i = [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

E, em cada um deles, queremos achar um polinômio de grau 3,

$$p_i(x) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot x^2 + d_i \cdot x^3,$$

tal que:

$$\begin{cases} p_i(x_i) = p_{i-1}(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) \\ p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i) \\ p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}) \end{cases}$$

Isto gera 4 equações (ou vínculos).

Temos 4 variáveis por polinômios → $4n$ variáveis no total $(a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1})$

→ Temos que arbitrar o valor de 2 delas. Mais precisamente, escolhemos mais dois vínculos, adequados ao problema que estejamos considerando.

→ Spline Natural

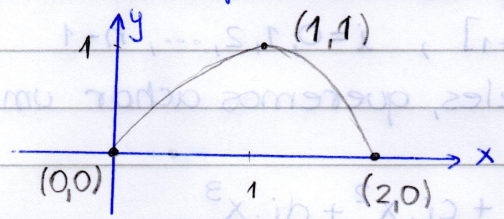
$$p_0''(x_0) = p_{n-1}''(x_n) = 0$$

→ Spline Forçada

$p_0'(x_0) = \lambda_0$ e $p_{n-1}'(x_n) = \lambda_n$, para valores $\lambda_0, \lambda_n \in \mathbb{R}$, conectados ao perfil que você deseja produzir.

Exemplo Ache a spline natural por:

x	y
0	0
1	1
2	0



→ $I_0 = [0,1] \longrightarrow p_0 = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3$

→ $I_1 = [1,2] \longrightarrow p_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3$

• $p_0'(x) = b_0 + 2c_0 x + 3d_0 x^2$

$p_0''(x) = 2c_0 + 6d_0 x$

• $p_0''(0) = 0 \rightarrow 2c_0 = 0$

• $p_0(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$

• $p_0(1) = 1$

$\rightarrow a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 1$

• $p_1'(x) = b_1 + 2c_1 x + 3d_1 x^2$

$p_1''(x) = 2c_1 + 6d_1 x$

• $p_1''(2) = 0 \rightarrow 2c_1 + 12d_1 = 0$

• $p_1(2) = 0 \rightarrow a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 = 0$

• $p_1(1) = 1$

$\rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$

• $p_0'(1) = p_1'(1)$

$$b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1$$

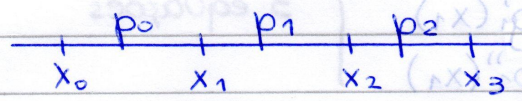
• $p_0''(1) = p_1''(1)$

$$2c_0 + 6d_0 = 2c_1 + 6d_1$$

Vamos tentar escrever esse sistema na forma matricial.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\
0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 & -6
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

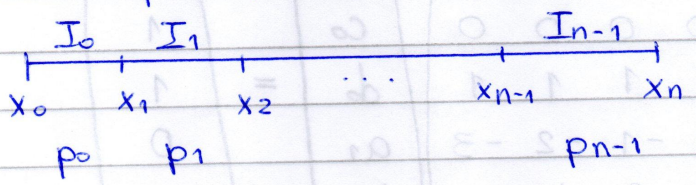
→ Para um ponto a mais, teríamos as seguintes condições de contorno.



$$
\left.
\begin{aligned}
p_0''(x_0) &= 0 \\
p_0(x_0) &= y_0 \\
p_0(x_1) &= y_1 \\
p_0'(x_1) &= p_1'(x_1) \\
p_0''(x_1) &= p''(x_1) \\
p_1(x_1) &= y_1 \\
p_1(x_2) &= y_2 \\
p_1'(x_2) &= p_2'(x_2) \\
p_1''(x_2) &= p_2''(x_2) \\
p_2(x_2) &= y_2 \\
p_2(x_3) &= y_3 \\
p_2''(x_3) &= 0
\end{aligned}
\right\}
\text{12 equações} = 4n
$$

O professor tinha se confundido antes, aqui ta certo!!

→ Relembrando como obtemos as equações para encontrar a spline, temos:



• para p_0: • condição contorno é
$$\left\{\begin{array}{ll} \rightarrow p_0''(x_0) = 0 & \text{natural} \\ \underline{\text{ou}} & \\ \rightarrow p_0'(x_0) = \lambda_0 & \text{forçada} \\ + & \\ \rightarrow p_0(x_0) = y_0 & \end{array}\right\} \text{2 equações}$$

• $$\left\{\begin{array}{l} p_0(x_1) = y_1 \\ p_0'(x_1) = p_1'(x_1) \\ p_0''(x_1) = p_1''(x_1) \end{array}\right\} \text{3 equações}$$

• para p_i: $0 < i < n-1$
$$\left\{\begin{array}{l} p_i(x_i) = y_i \\ p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}) \\ p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}) \\ p_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{array}\right\} \text{4 equações por } n-2 \text{ p's} = 4.(n-2)$$

• para p_{n-1}:
$$\left\{\begin{array}{l} p_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} \\ p_{n-1}''(x_n) = 0 \\ p_{n-1}(x_n) = y_n \end{array}\right\} \text{3 equações}$$

\# equações: $2 + 3 + 4(n-2) + 3 = \boxed{4n \text{ equações}}$

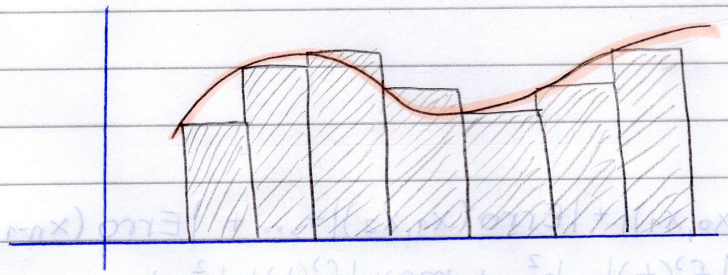
Integração Numérica

→ Método dos Retângulos

Dada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ queremos aproximar

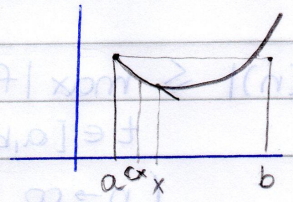
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{por} \quad h.(f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})),$$

onde $h = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i.h$, p/ $i = 0,1,2,\dots$



Queremos estimar qual uma cota para o erro ao fazer esta aproximação.

$$\text{Erro} = \int_a^b f(x)dx - f(a).(b-a) = \int_a^b (f(x)-f(a))\,dx$$



Para cada $x \in [a,b]$:

$|f(x)-f(a)| = |f'(c_x)|.|(x-a)|$,

TVM para algum $c_x \in [a,x]$

$$|\text{Erro}| = \left|\int_a^b f(x)-f(a)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)-f(a)|\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \max|f'(t)|.|x-a|\,dx$$

$(t \in [a,b])$

$$\to |\text{Erro}| \leq \max|f'(t)|.\frac{(b-a)^2}{2}$$

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$

- $\int_a^b f(x)\,dx - h\left(f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})\right) =$

$$= \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - h.f(x_0)\right] + \left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - h.f(x_1)\right] + \dots +$$

$$+ \left[\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx - h.f(x_{n-1})\right]$$

Temos, então:

$$\Rightarrow |Erro(n)| \leq |Erro(x_0,x_1)| + |Erro(x_1,x_2)| + \dots + |Erro(x_{n-1},x_n)| \leq$$

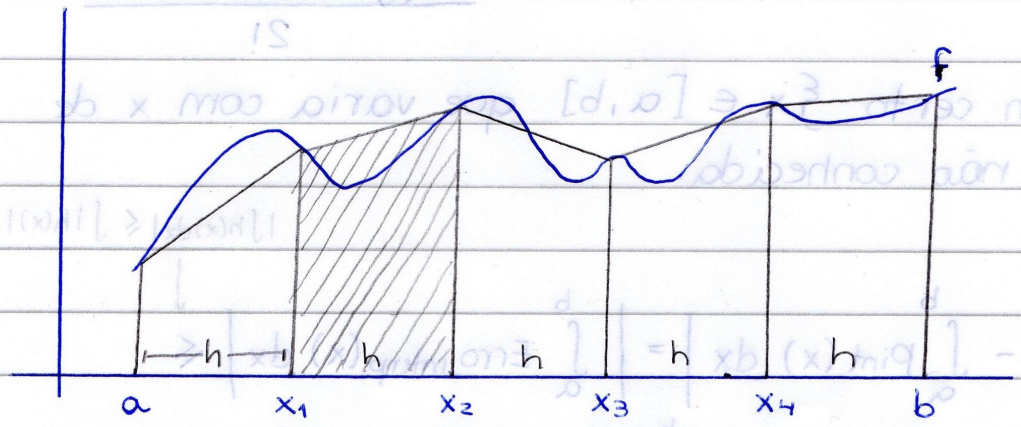
$$\leq \max_{t\in[x_0,x_1]} |f'(t)| . \frac{h^2}{2} + \max_{t\in[x_1,x_2]} |f'(t)| . \frac{h^2}{2} + \underbrace{\dots}_{(\text{até } t\in[x_{n-1},x_n])}$$

$$\leq \max_{t\in[x_0,x_n]} |f'(t)| . n . \frac{(b-a)^2}{2n}$$

$$\boxed{|Erro(n)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| . \frac{(b-a)^2}{2n}}$$

$(n \to \infty,\ Erro \to 0)$

Metodo dos trapézios



$n = 5$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum \text{área do trapézio}$$

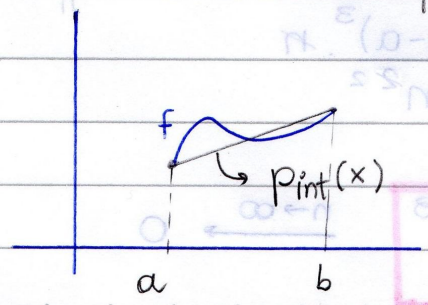
$$= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}.h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.h + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}.h$$

$$= \frac{h}{2}.\left(f(x_0) + 2.f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

- Vamos agora tentar estimar:

$$\text{Erro} = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}.\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}.\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right) \right)}_{\text{temos que estimar}} \right|$$



$p_{int}(x)$ é o polinômio interpolador da tabela

x	y
a	f(a)
b	f(b)

$\therefore$ p/ $x \in [a,b]$

$$f(x) - p_{int}(x) = \text{Erro}_{\text{pol interp}}(x) = \frac{f''(\xi_x)\cdot(x-a)\cdot(x-b)}{2!}$$

para um certo $\xi_x \in [a,b]$ que varia com x de forma não conhecida.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_{int}(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \text{Erro}_{\text{interp}}(x)\,dx\right| \leq$$

$|\int h(x)dx| \leq \int |h(x)|dx$

$$\leq \int_a^b |\text{Erro}_{\text{interp.}}(x)|\,dx = \int_a^b \frac{|f''(\xi_x)|\,|(x-a)\cdot(x-b)|}{2}\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|\cdot\frac{1}{2}\cdot|(x-a)\cdot(x-b)|\,dx =$$

$$= \frac{-\max|f''(t)|}{2}\cdot\int_a^b (x-a)\cdot(x-b)\,dx$$

$$\int_0^1 h\cdot t\cdot h\cdot(t-1)\cdot h\,dt$$

$$= \frac{\max|f''(t)|\cdot h^3}{2}\int_0^1 -t\cdot(t-1)\,dt = \boxed{\frac{\max|f''(t)|}{12}\cdot h^3}$$

$$\therefore \text{Erro} = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\cdot(f(x_i)+f(x_{i+1}))\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\cdot(f(x_i)+f(x_{i+1}))\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\max_{t\in[a,b]}|f''(t)|}{12}\cdot\underbrace{(x_{i+1}-x_i)^3}_{h^3} \leq$$

$$\leq \frac{\max|f''(t)|}{12}\cdot h^3\cdot n = \frac{\max|f''(t)|}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^{\cancel{3}\,2}}\cdot\cancel{n}$$

$$\therefore \boxed{\text{Erro}_{\text{met. trapezios}} \leq \frac{\max|f''(t)|\cdot(b-a)^3}{12n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Exemplo Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ pelo Método dos Trapézios com erro $< 10^{-3}$.

Sol: Temos que achar um valor n que dê erro menor que 10^{-3}.

- $f(x) = e^{-x^2}$

  $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

  $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

- $\max\limits_{t \in [0,1]} |f''(t)| \leq 2 \cdot 1 = 2$

  isso daqui é estimado: p/ $x \in [0,1]$ o max de $4x^2 - 2$ é 2 e o max de e^{-x^2} é 1

- $|\text{Erro}_{\square}| \leq \dfrac{2 \cdot (1-0)^3}{12 \cdot n^2} = \dfrac{1}{6n^2} < 10^{-3}$

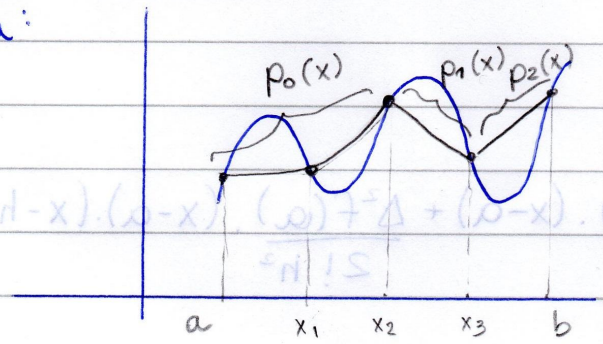
- $n = 13$ serve

  $h = \dfrac{(1-0)}{13} = \dfrac{1}{13}$

- $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \dfrac{1}{26} \cdot \left(f(0) + 2 \cdot f\left(\tfrac{1}{13}\right) + 2 \cdot f\left(\tfrac{2}{13}\right) + \ldots + 2f\left(\tfrac{12}{13}\right) + f(1) \right)$

Método de Simpson

Ideia:



$n = 3 = \#$ de polinômios interpoladores usados

Queremos aproximar

$\int_a^b f(x)dx$ pela soma das áreas delimitadas por cada pol. interpolador.

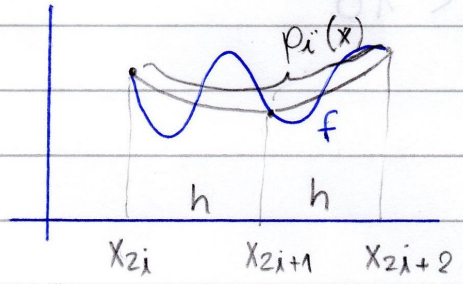
$$|\text{Erro}| = \left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_{\underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}}^{x_2} p_0(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} p_1(x)dx + \int_{x_3}^{\overset{\shortparallel}{x_4}\,b} p_2(x)\,dx \right) \right|$$

p/ o graf. desenhado

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_2} p_0(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx - \int_{x_2}^{x_3} p_1\,dx \right| +$$

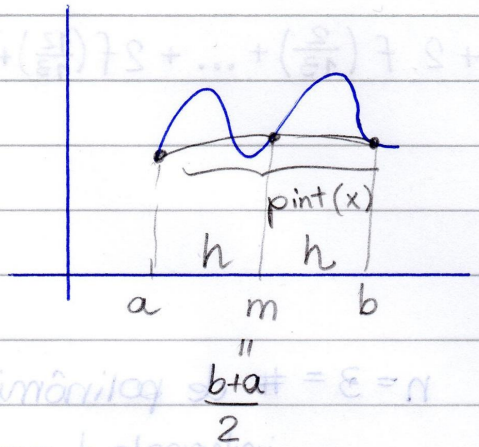
$$+ \left| \int_{x_3}^{x_4} f(x)\,dx - \int_{x_3}^{x_4} p_2(x)\,dx \right|$$

Inicialmente, olhemos para



Note, como antes, que $p_i(x)$ é o pol. interp. da tabela

x	y
x_{2i}	$f(x_{2i})$
x_{2i+1}	$f(x_{2i+1})$
x_{2i+2}	$f(x_{2i+2})$



$$h = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{pint}(x) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{1!\,h}\cdot(x-a) + \frac{\Delta^2 f(a)}{2!\,h^2}\cdot(x-a)\cdot(x-h)$$

Vamos agora calcular

$$\int_a^b p_{int}(x)\,dx = \int_0^2 \left(f(a) + \frac{\Delta f(a)}{h}.\cancel{h}t + \frac{\Delta^2 f(a)}{2\cancel{h^2}}\cancel{h}.t.\cancel{h}.(t-1)\right).h\,dt =$$

$$= 2f(a).h + \underbrace{\Delta f(a)}_{f(m)-f(a)}.h.\underbrace{2}_{\int_0^2 t\,dt} + \frac{\Delta^2 f(a)}{2}.h.\int_0^2 t.(t-1)\,dt =$$

$$= \cancel{2f(a).h} + \frac{6.f(m).h}{3} - \cancel{2f(a).h} + \left(\frac{f(b)-2f(m)+f(a)}{3}\right).h =$$

$$= \left(f(a) + 4f(m) + f(b)\right).\frac{h}{3} \;//$$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x)\,dx = \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right).\frac{h}{3}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}.\left(f(x_0)+4.f(x_1)+f(x_2)\right) + \frac{h}{3}.\left(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right) +$$

$$+ \dots + \frac{h}{3}\left(f(x_{2n-2})+4.f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\dots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+ \right.$$
$$\left. + f(x_{2n})\right) =$$

$$= \underbrace{(b-a).\frac{1}{n}\left(\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + \dots + \frac{f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})}{6}\right)}_{\text{"Valor médio esperto de f"}}$$

$$\boxed{\left|\text{Erro}_{\text{simpson}}\right| \leq \frac{\max\left|f''''(t)\right|}{\underbrace{2880}_{90.2^5}.n^4}.(b-a)^5}$$

essa fórmula ele não vai deduzir, amém

Exemplo Aproxime $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ pelo mét. de Simpson com erro $< 10^{-10}$.

Sol: Ache n:

$$f''(x) = (4x^2-2).e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = 8x.e^{-x^2} + (4x^2-2).(-2x).e^{-x^2}$$

$$= (-8x^3+12x).e^{-x^2}$$

$$f'''' = (-24x^2+12).e^{-x^2} + (-8x^3+12x).(-2x).e^{-x^2}$$

$$= (16x^4-48x^2+12).e^{-x^2}$$

O máximo de $16x^4-48x^2+12$ é 76
O maximo de e^{-x^2} é 1 $\Big\}$ p/ $x \in [0,1]$

$$\therefore \underset{x\in[0,1]}{|f''''(x)| \leq 76.1}$$

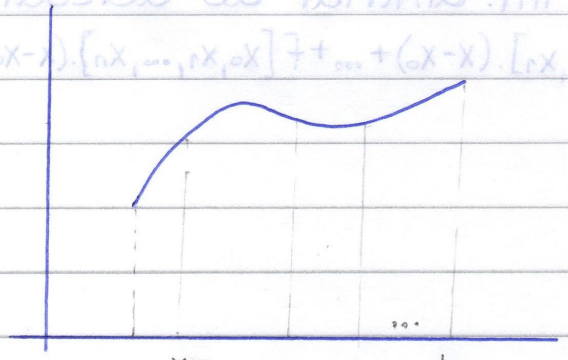
$$\therefore \frac{76.(1-0)^5}{2880\, n^4} \leq 10^{-10}$$

$$n^4 \geq 10^{10}.\frac{76}{2880}$$

$$n \geq 227 \longrightarrow h = \frac{1-0}{2n} = \frac{1}{454}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \doteq \frac{1}{3.454}.\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{454}\right) + 2f\left(\frac{2}{454}\right) + \dots + 2f\left(\frac{452}{454}\right) + 4.f\left(\frac{453}{454}\right) + f(1)\right) //$$

Integração Gaussiana



x	y
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$

$n+1$ pontos

$\rightarrow$ grau $p_{int} \leq n$

$$f(x) \sim \underbrace{f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + \ldots + f(x_n).L_n(x)}_{p_{int}}$$

onde $L_i(x) = \dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1}).(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1}).(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

Aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por

$$\int_a^b p_{int}(x)\,dx = f(x_0).\underbrace{\int_a^b L_0(x)\,dx}_{w_0} + f(x_1).\underbrace{\int_a^b L_1(x)\,dx}_{w_1} + \ldots + f(x_n).\underbrace{\int_a^b L_n(x)\,dx}_{w_n}$$

A escolha que faremos de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ só dependerá de $[a,b]$, não de f. Assim, $\forall f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável,

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim f(x_0).w_0 + f(x_1).w_1 + \ldots + f(x_n).w_n$$

Os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ serão determinados impondo que se $f(x)$ for um polinômio de grau $\leq 2n+1$, a aproximação acima será exata.

Dado $x \in [a,b]$, acrescentemos o ponto $(x, f(x))$ à tabela

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
x	$f(x)$ $\leftarrow$

O polinômio int. anterior ao acréscimo:

$$p_{int} = f[x_0] + f[x_0,x_1].(x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n].(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

- $f(x) = p_{int}(x) + \dfrac{f^{n+1}(\xi x)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)\dots(x-x_n)$

- Seja $\bar{p}_{int}(x)$ o novo pol. da nova tabela:

$$\bar{p}_{int}(x) = \underbrace{f[x_0] + f[x_0,x_1].(x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n].(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}_{p_{int}(x)} + f[x_0,\dots,x_n,x].(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)$$

$\forall x$ fixado

Note que se $y = x$, então:

$\bar{p}_{int}(x) = f(x)$

$f(x) = p_{int}(x) + f[x_0,x_1,\dots,x_n,x].(x-x_0)\dots(x-x_n)$, $\forall x \in [a,b]$ fixado

Logo, $f[x_0,x_1,\dots,x_n,x] = \dfrac{f^{n+1}(\xi x)}{(n+1)!}$,

onde ξx veio da fórmula do erro na interpolação.

Vamos tentar entender que tipo de coisa é $f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]$.

Suponha que f é polinômio de grau $\leq 2.2+1$

$$
\begin{array}{lll}
x_0 & f(x_0) \longrightarrow & \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \longrightarrow \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \longrightarrow (*) \\
x_1 & f(x_1) \longrightarrow & \dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} \\
x_2 & f(x_2) \longrightarrow & \dfrac{f(x_3)-f(x)}{x_3-x} \longrightarrow \dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} - \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}}{x-x_1} \\
x & f(x) \longrightarrow &
\end{array}
$$

pol. de grau ≤ 4

se anula em x_1

pol. de grau ≤ 3

$$
** \left\{ \frac{\dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x-x_1} - \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{x-x_0} \right\} (*)
$$

se anula em x_0

Vamos assumir que $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$ é polinômio de grau $\leq n$, quando f é pol. de grau $\leq 2n+1$. Isto é verdade e verificaremos depois.

Como $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \dfrac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}$, se

$$\int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \cdot (x-x_0)\dots(x-x_n)\,dx = 0,$$

então a aprox. é exata.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b p_{int}(x)\,dx}_{= f(x_0)\cdot\omega_0 + \dots + f(x_n)\cdot\omega_n} + \int_a^b \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]}_{\text{pol. grau} \leq n} \cdot \underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_n)}_{\text{grau } n+1}\,dx$$

Sejam $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots$ os pol. ortogonais mônicos em $[a,b]$.

Então $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = a_0 . p_0(x) + \dots + a_n . p_n(x)$.

Desta forma, se $(x-x_0)\dots(x-x_n)$ for igual a $p_{n+1}(x)$ temos que

$$\int_a^b f[x_0, \dots, x].(x-x_0)\dots(x-x_n)\,dx = a_0.\underbrace{\langle p_0, p_{n+1}\rangle}_{0} + \dots + a_n.\langle p_n, p_{n+1}\rangle = 0$$

Se $p_{n+1}(x)$ tem exatamente $n+1$ raízes reais em $[a,b]$, basta tomarmos $x_0, x_1, \dots, x_n$ como sendo essas raízes.

Note que a e b não precisam então ser raízes de p_{n+1}, assim x_0 não precisa ser a e nem x_n ser b.

<u>Lema</u>: p_{n+1} tem exatamente $n+1$ raízes reais.

<u>Prova</u>: Fatore $p_{n+1}(x)$ de seguinte forma:

$$p_{n+1}(x) = \underbrace{q(x)}_{\text{não troca de sinal em } [a,b]} . (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_k)^{n_k}$$

então n_1 até n_k são ímpares e $a_1, \dots, a_k \in [a,b]$

<u>Ex</u>: $p_{int}(x) = (x-18).\underbrace{(x^5+1).(x-1)^4.(x-2)^6}_{\text{não troca de sinal em } [1,3]}.(x-1{,}5)^3.(x-1{,}7)$

$n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n+1$

Seja $m(x) = (x-a_1)\dots(x-a_k)$, m tem grau k

$$\langle m, p_{int}(x)\rangle = \int_a^b q(x).(x-a_1)^{n_1+1}.(x-a_2)^{n_2+1}\dots(x-a_k)^{n_k+1}\,dx \neq 0$$

$\hookrightarrow k = n+1$

Logo p_{n+1} tem $n+1$ raízes reais com mult. 1 cada uma.

12ª semana

Numérico

→ Suponha que você olhe para seguinte tabela ($f(x)$ é pol. de grau $\leq 2n+1$, $x_0, \dots, x_n$ são pontos fixados e x é um ponto qualquer):

$$
\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & f[x_0,x_1] & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_1,x_2] & (\dots) \quad f[x_0,x_1,\dots,x_n] \quad f[x_0,x_1,\dots,x_n,x] \\
x_2 & f(x_2) & & \dots \quad f[x_1,\dots,x_n,x] \\
\vdots & \vdots & & f[x_{n+1},x_n,x] \quad (\dots) \\
x_n & f(x_n) & f[x_n,x] & \\
x & f(x) & \parallel & \\
 & & \dfrac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n} &
\end{array}
$$

↳ polinômio de grau um a menos que f

$$\underbrace{f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]}_{} = \frac{\overbrace{f[x_1,\dots,x_n,x]}^{p(x)} - \overbrace{f[x_0,\dots,x_n]}^{cte}}{x-x_0}$$

↳ queremos mostrar que esse cara era polinômio de grau = grau f − $(n+1)$

Assumindo que $f[x_1,\dots,x_n,x]$ é polinômio, mostramos que o polinômio

$p(x) \overset{def}{=} f[x_1,\dots,x_n,x] - f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ se anula em x_0.

Se isso ocorre, então:

$f[x_0,x_1,\dots,x_n] = f[x_1,x_2,\dots,x_n,x_0]$, ou seja, não importa a ordem da tabela para o termo de maior grau.

Mostramos que dados pontos

$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$,

construindo a tabela:

x	y
x_i	$f(x_i)$
x_j	$f(x_j)$
$\vdots$	$\vdots$
x_k	$f(x_k)$

contendo todos os $n+1$ pontos, sem repetição, vale:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \underbrace{f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]}_{\text{mesmos pontos em uma ordem qualquer}},$$

$\forall$ que seja a ordem na qual consideremos os pontos.

<u>Ex</u>:

$$\vdots$$

$$f[x_1, x_2, x_3]$$
$$\parallel$$
$$f[x_2, x_1, x_3]$$
$$\parallel$$
$$f[x_1, x_3, x_2]$$
$$\vdots$$

Não importa a ordem que você considere a tabela, o polinômio interpolador é sempre o mesmo. Logo o coef. de maior grau dele, em qualquer ordem, é o mesmo. Logo, como tal coeficiente é $f[x_0, \dots, x_n]$ para a ordem usual e $f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ para a tabela:

x	y
x_{i_0}	$f(x_{i_0})$
x_{i_1}	$f(x_{i_1})$
$\vdots$	$\vdots$
x_{i_n}	$f(x_{i_n})$

, concluimos que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$$

Se você tem, por exemplo:

x	y
x_0	y_0
$\vdots$	$\vdots$
x_{50}	y_{50}

olhe, por exemplo para:

x	y
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4

x	y
x_4	y_4
x_2	y_2
x_3	y_3

$$f[x_2, x_3, x_4] = f[x_4, x_2, x_3]$$

Olhemos para um exemplo:

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1].(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2].(x - x_0).(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3].(x - x_0).(x - x_1).(x - x_2)$$

$$= (\quad) + f[x_0, x_1, x_2, x_3].x^3$$

pol de grau ≤ 2

IGUAL

x	y
x_0	y_0
x_2	y_2
x_1	y_1
x_3	y_3

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_2].(x - x_0) + f[x_0, x_2, x_1].(x - x_0).(x - x_2) + f[x_0, x_2, x_1, x_3].(x - x_0).(x - x_2).(x - x_3)$$

$$= (\quad) + f[x_0, x_2, x_1, x_3].x^3$$

pol de grau ≤ 2

Dado que já sabemos que $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$ é polinômio de grau $f-(n+1)$, se grau de $f \leq 2n+1$

$\therefore$ grau de $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \leq n$.

$$\int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)\, dx$$

pode ser igual a zero desde que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam raízes do polinômio ortogonal de grau $n+1$.

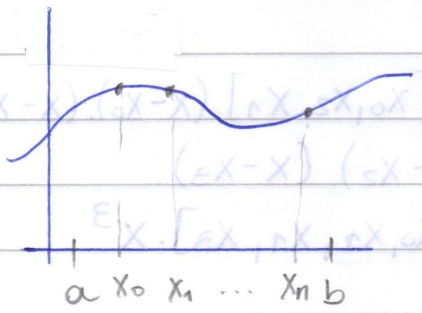
Se $\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ é uma base ortogonal de pol. mônicos para pol. de grau $\leq n+1$ com respeito a:

$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\, dx$, então como o grau de

$(f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]) \leq n$, $\langle \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]}_{= a_0 p_0 + \dots + a_n p_n}, p_{n+1}(x)\rangle = 0$.

Se for possível que $(x-x_0)\dots(x-x_n) = p_{n+1}(x)$, aí consigo anular a integral anterior.

Por isso é necessário e suficiente que cada $p_k(x)$ tenha exatamente k raízes reais em $[a,b]$, coisa que já mostramos. Assim, basta tomar $x_0, x_1, \dots, x_n$ como sendo tais raízes e desta forma:



queríamos aproximar a $\int_a^b f(x)\,dx$ pela integral do seu pol. interpolador por:

x	y
x_0	$f(x_0)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b p_{int}(x)\,dx = f(x_0)\cdot\overbrace{\int_a^b L_0(x)\,dx}^{w_0} + f(x_1)\cdot\overbrace{\int_a^b L_1(x)\,dx}^{w_1} + \dots +$$

$$+ f(x_n)\underbrace{\int_a^b L_n(x)\,dx}_{w_n}$$

$w_0, w_1, \dots, w_n$ só dependem de n e $[a,b]$

Exemplo Calcule $\int_0^3 e^{x^2}dx$ pelo método de Gauss com $n=2$, usando a informação dos polinômios ortogonais em $[-1,1]$.

$$\int_0^3 e^{x^2}dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{e^{\left(\frac{3}{2}(t+1)\right)^2}\cdot\frac{3}{2}}_{f(t)}\,dt \cong f(t_0)\cdot w_0 + f(t_1)\cdot w_1 + f(t_2)\,w_2$$

Note que t_0, t_1, t_2 são as raízes do polinômio ortogonal de grau $2+1$ em $[-1,1]$.

Da tabela de polinômios ortogonais: (é uma tabela dada)

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= -0{,}77459667 \\ t_1 &= 0 \\ t_2 &= 0{,}77459667 \end{aligned}\right\}$$ vem da tabela, não é uma conta fácil, mas é direta.

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)\cdot(x-0{,}77459667)}{(-0{,}77459667-0)\cdot(-0{,}77459667-0{,}77459667)}\,dx$$

$\cong 0{,}555\dots$

$w_1 = 0{,}8888\dots$

$w_2 = 0{,}5555\dots$

Resolução numérica de Eqs. Diferenciais Ordinárias

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \operatorname{sen} x \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int dt$$

→ Método de Euler

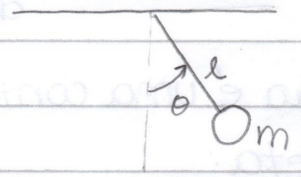
Dada uma eq. dif. ordinária

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad \text{onde } f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x : I \to \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Prob. de Cauchy

Exemplo

1) Pêndulo Simples



$$\begin{cases} \ddot{\theta} + g/\ell \ \operatorname{sen}\theta = 0 \\ \theta(t_0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t_0) = \omega_0 \end{cases}$$

Para escrever esta eq. na forma (*), crio uma variável auxiliar, $\omega = \dot{\theta}$

$$\dot{\omega} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$x(t) = (\theta(t), \omega(t)) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(t, \theta, \omega) = \left(\omega, -\frac{g}{\ell} \cdot \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

2) $\dddot{x} - 2\underset{\uparrow\, y}{\dot{x}}\,\underset{\uparrow\, z}{\ddot{x}} + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} t$ $\quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \\ \ddot{x}(t_0) = z_0 \end{cases}$

chame:

$\dot{x} = y \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{y} = \dddot{x}$

$\dot{y} = z \Rightarrow \dot{z} = \ddot{y} = \dddot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = 2.y.z - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} t \\ (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \underbrace{(y, z, 2yz - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} t)}_{= f(t,x,y,z)} \end{cases}$$

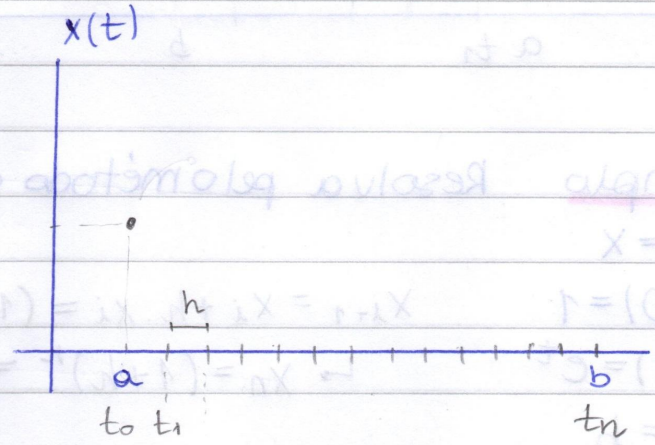
Método de Euler

$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}$

$x(a) = x_0$

$t_i = t_0 + h.n \quad , n \in \mathbb{N}$

$h = \dfrac{b-a}{n}$



$\dfrac{d\,x(t)}{dt} = f(t, x(t))$

p/ t na malha $\dfrac{d\,x(t_i)}{dt} = f(t_i, x(t_i))$ $\quad = \lim\limits_{e \to 0} \dfrac{x(t_i + e) - x(t_i)}{e}$

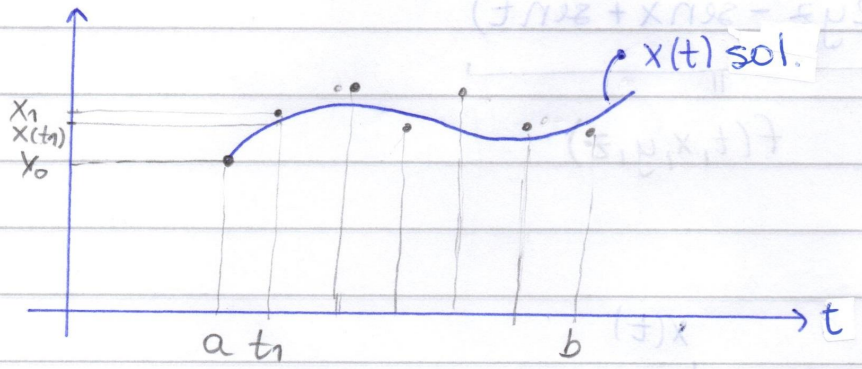
Aproximamos $\dfrac{d\,x(t_i)}{dt}$ por $\dfrac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h}$

$x(t_{i+1}) \cong x(t_i) + h.f(t_i, x(t_i))$

Para aplicar a recursão anterior, seria necessário conhecer $x(t_i)$ para achar uma aproximação de $x(t_{i+1})$. Então, abdicando mais um pouco de precisão, fazemos o seguinte:

Obtemos a seq. x_i, aproximação de $x(t_i)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + f(\overset{a+h.i}{\overset{\shortparallel}{t_i}}, x_i) \cdot h \\ x_0 = c_0 \end{cases}$$



Exemplo Resolva pelo método de Euler, em $[0,1]$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$x(t) = e^t$

$t_n = b$

$n = \dfrac{b-a}{h} = \dfrac{1}{h}$

$x_{i+1} = x_i + h.x_i = (1+h).x_i$

$\hookrightarrow x_n = (1+h)^n = (1 + 1/n)^n \xrightarrow{n \to \infty} e$

Exemplo (Pêndulo)

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -g/\ell \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

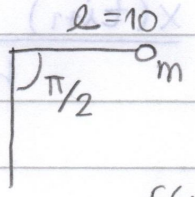
$\theta(0) = \pi/2$

$\omega(0) = 0$

$I = [0,1]$

$n = 10$

$h = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$



$f(t,\theta,\omega) = (\omega, -\dfrac{g}{\ell} \operatorname{sen}\theta)$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + h \cdot \omega_i$$
$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left(\frac{g}{\ell} \cdot \operatorname{sen}\theta_i\right) \cdot h$$

$$\theta_0 = \pi/2$$
$$\omega_0 = 0$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10} \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_1 = 0 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{10} = -0{,}1$$

Análise do erro

Queremos estimar

$\| x(t_i) - x_i \|$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Lembre que $t = a + h \cdot i$ e $x(t)$ é a solução de $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(a) = c_0 \end{cases}$, com $t \in [a,b]$.

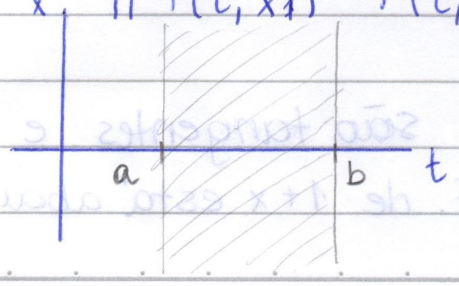
Para isso precisamos de alguns lemas e de algumas hipóteses sobre $f(t,x)$.

<u>Def</u>: Seja $D = t \in [a,b] \times x \in \mathbb{R}^n$ $\quad (\underset{\in \mathbb{R}}{f(t,}\underset{\in \mathbb{R}^n}{x)} \in \mathbb{R}^n)$

Suponha que f seja contínua em D.

Dizemos que f é Lipschitz em x, se

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| \leq K \cdot \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in D$$

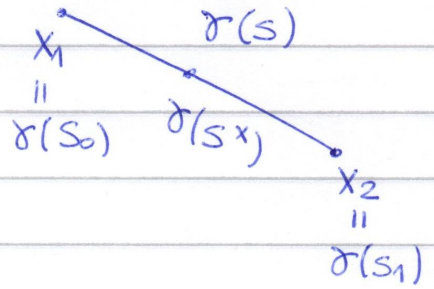


Lema: Se D é conexo e $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ tem norma limitada em D, então a cota dessa norma serve como constante de Lipschitz para f.

Uma cota para $\frac{\partial f}{\partial x}$ é um número $K>0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| \leq K, \quad \forall (t,x) \in D$$

cota

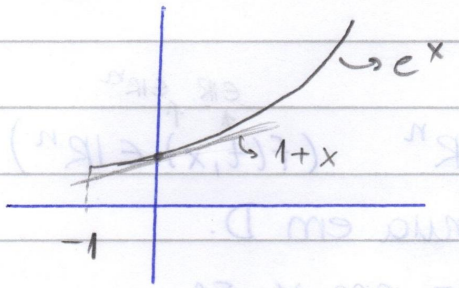


$$f(t,x_1) - f(t,x_2) = f(t,\gamma(s_0)) - f(t,\gamma(s_1))$$

Lema: $\forall x > -1$ e m natural

$$(1+x)^m \leq e^{mx}$$

Prova:



$e^x = 1+x$

$(1+x)' = 1$

$(e^x)' = e^x$

$1+0=1 \Rightarrow 1+x$ intersepta e^x em $x=0$

$e^0 = 1$ e como $(1+x)'|_{x=0} = (e^x)'|_{x=0}$ são tangentes e

como $(e^x)'' > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o graf. de $1+x$ está abaixo do de e^x. $(1+x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}$

Lema: Sejam t e s números positivos, a_i uma sequência que satisfaz $a_0 \geq -\frac{t}{s}$ e $a_{i+1} \leq (1+s).a_i + t$

Então $a_{i+1} \leq e^{(i+1).s}.\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$

Prova:

$$a_1 \leq (1+s).a_0 + t$$

$$a_2 \leq (1+s).a_1 + t \leq (1+s)^2.a_0 + (1+s).t. + t$$

$$a_3 \leq (1+s).a_2 + t \leq \dots \leq (1+s)^3.a_0 + \left((1+s)^2 + (1+s) + 1\right).t$$

$\therefore$

$$a_K \leq (1+s)^K.a_0 + \left(1 + (1+s) + (1+s)^2 + \dots + (1+s)^{K-1}\right).t$$

usando $(1+s)^K \leq e^{Ks}$

$$a_K \leq e^{Ks}.a_0 + \left((1+s)^K - 1\right).\frac{t}{s} \leq e^{K.s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

13ª semana

Numérico

<u>Lema 1</u>: $\forall x \geq -1$ e $m \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$

<u>Lema 2</u>: $s, t > 0$, ai sequência que satisfaz $a_0 \geq -t/s$ e

$$a_{i+1} \leq (1+s).a_i + t$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1).s}.(a_0 + t/s) - t/s$$

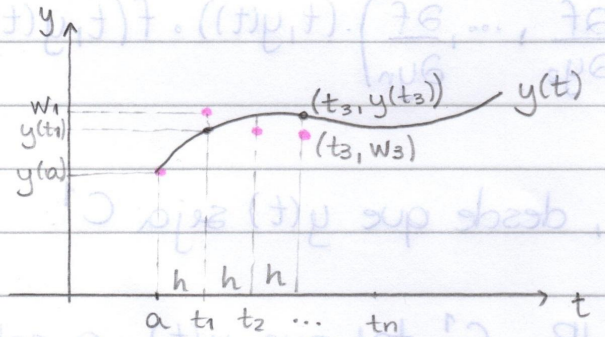
Método de Euler (Erro)

$$* \begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \dot{x} = f(t, x)$$

O método de Euler nos diz que, se olharmos para instantes $t_0, \underbrace{t_0+h}_{t_1}, \underbrace{t_0+2h}_{t_2}, \ldots,$

uma possível aproximação de $y(t_i)$ é dada por

$w_i = w_{i-1} + h.f(t_{i-1}, w_{i-1})$



Suponha que desejamos achar uma aproximação de solução em $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Então, dado $n \in \mathbb{N}^*$, seja $h = \frac{b-a}{n}$,

queremos estimar

$$|y(t_i) - w_i|, \text{ p/ } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

↳ a solução deste problema está def. $]-\infty, 1[$.

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{x} = t - c$$

$$x = \frac{1}{c-t} \quad \rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{1-t}}$$

Suponha que a solução de * está definida no intervalo $[a,b]$ e $y(t)$ é C^1. ($f(t,y)$ é C^1 também, então)

Neste caso $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ é C^1 também $\Rightarrow y(t)$ é C^2.

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}\right)(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

$\Downarrow$

$\ddot{y}(t)$ é contínua em $[a,b]$, desde que $y(t)$ seja C^1.

Teorema: Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 tal que $y(t)$, a solução de $\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ está definida em $[a,b]$.

↳ Problema de Cauchy

Então $\ddot{y}(t)$ é contínua em $[a,b]$, $y(t)$ é limitada em $[a,b]$. Seja $M > 0$ tal que $|\ddot{y}(t)| < M$, $\forall t \in [a,b]$, e seja $K > 0$ tal que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K \cdot |y_1 - y_2|$, $\forall t \in [a,b]$, $y_{1,2} \in \mathbb{R}$,

↑

Lipschitz

ENTÃO, ($w_{i+1} = w_i + h.f(t_i, w_i)$ Euler)

$$\boxed{|y(t_i) - w_i| \leq \frac{h.M}{2K}.\left(e^{K\overbrace{(t_i-a)}^{\leq b-a}} - 1\right)}, \text{ p/ } i = 0, 1, \dots, n$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$, e para $h \to 0$, erro $\to 0$.

Erro de Taylor

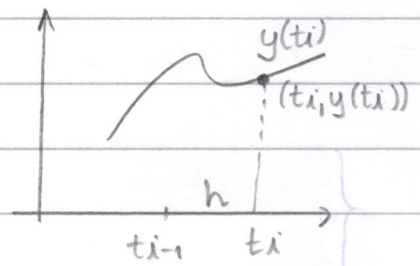
<u>Prova</u>:

$$y(t_i) - w_i = \left[y(t_{i-1}) + h.\dot{y}(t_{i-1}) + \frac{h^2}{2}.\ddot{y}(t_i^*)\right] - (w_{i-1} + h.f(t_{i-1}, w_{i-1}))$$

$\in [t_{i-1}, t_i]$

$= f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$

pol. de Taylor de ordem 1 + Erro de $y(t)$ em $t = t_{i-1}$



Tomo o módulo da igualdade acima e aplico que $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|y(t_i) - w_i| \leq |y(t_{i-1}) - w_{i-1}| + h.\underbrace{|f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, w_{i-1})|}_{\leq K.|y(t_{i-1}) - w_{i-1}|} + \frac{h^2}{2}.\underbrace{|\ddot{y}(t_i^*)|}_{\leq M}$$

$$|y(t_i) - w_i| \leq (1 + h.K).|y(t_{i-1}) - w_{i-1}| + \underbrace{\frac{h^2}{2}.M}_{t}$$

$a_i = |y(t_i) - w_i|$

$$\boxed{a_0 = 0 \geq -\frac{h}{2}\frac{M}{K}}$$

podemos aplicar o lema 2.

Lema 2 $\Rightarrow$

$$a_{i+1} = |y(t_{i+1}) - w_{i+1}| \leq e^{\overbrace{(i+1)h}^{t_{i+1}-a}K} \cdot \left(0 + \frac{h.M}{2K}\right) - \frac{h.M}{2K} =$$

$$= e^{(t_{i+1}-a).K} \cdot \frac{hM}{2K} - \frac{hM}{2K}$$

$$= \frac{h.M}{2K} \cdot \left(e^{(t_{i+1}-a).K} - 1\right)$$

É possível mostrar que, se levarmos em conta o erro de arredondamento e truncamento, quando h fica muito pequeno, (menor que a raiz da ordem do erro truncado e arredondado da máquina), o erro entre $y(t_i)$ e w_i começa a crescer.

→ Métodos de ordem superior

Euler:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t+h) \cong y(t) + h.y(t)$$

$$\underbrace{\cancel{y(t_{i+1})}}_{w_{i+1}} = \underbrace{\cancel{y(t_i)}}_{w_i} + h.f(t_i, \underbrace{\cancel{y(t_i)}}_{w_i})$$

Exemplo

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = t.y^2(t) \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$\ddot{y} = 1.y^2 + t.2.y.\overbrace{\dot{y}}^{t.y^2} = y^2 + 2.t^2.y^3$$

$$\dddot{y} = 2y.\underbrace{\dot{y}}_{ty^2} + 4t.y^3 + 2t^2.3y^2.\underbrace{\dot{y}}_{ty^2}$$

2ª ordem

$$y(t+h) \cong y(t) + h.\dot{y}(t) + \frac{h^2}{2}.\ddot{y}(t) = y^2(t) + 2t^2 y^3(t)$$

$$\Downarrow$$

Euler

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h.t_i.w_i^2 + \frac{h^2}{2}.(w_i^2 + 2t_i^2 w_i^3) \\ w_0 = 1 \\ t_0 = 2,\ t_i = 2 + i.h \\ |y(t_i) - w_i| \leq \text{constante}.h^2 \end{cases}$$

Mais geralmente $|y(t_i) - w_i| < \text{const}.h^2$, onde n é ordem da expansão em Taylor que foi usada.
Porém, não se usa esses métodos na prática porque eles envolvem cálculos de derivadas até ordem n de $f(t, y(t))$, que podem dar muito trabalho.

Método de Runge-Kuta

2ª ordem

Queremos olhar para

$$y(t_i+h) \cong y(t_i) + h.\dot{y}(t_i) + \frac{h^2}{2}.\underbrace{\ddot{y}(t_i)}_{=}$$

$$\Downarrow$$

$$w_{i+1} = w_i + h.f(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2}.\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, w_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, w_i).f(t_i, w_i)\right)$$

$$w_{i+1} = w_i + h.(a.f(t_i^*, w_i^*) + b.f(t_i^{**}, w_i^{**}),$$

quero achar $a, b, (t_i^*, w_i^*), (t_i^{**}, w_i^{**})$ de forma às expressões acima serem muito próximas.

Tome $(t_i^*, w_i^*) = (t_i, w_i)$

$(t_i^{**}, w_i^{**}) = (t_i + p.h).w_i + q.h.f(t_i, w_i))$

As incógnitas agora são a, b, p, q.

2º termo: ← aprox. de taylor de ordem 1

$$b.\, f(t_i + p.h,\ w_i + q.h.f(t_i, w_i)) \cong$$

$$b.\left(f(t_i, w_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, w_i).\, p.\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, w_i).\, q.\, h.\, f(t_i, w_i)\right)$$

Agora, iguale as coisas: (verifique, se quiser)

acharemos: $\begin{cases} a + b = 1 \\ b.\, p = 1/2 \\ b.\, q = 1/2 \end{cases}$

Tome por exemplo, $a = b = \frac{1}{2}$ e $p = q = 1$.

Assim, ficamos com

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + h.\, f(t_i, w_i))\right) \\ w_0 = y_0 \end{cases}$$

$$|y(t_i) - w_i| < \text{const.}\, h^2$$

Exemplo

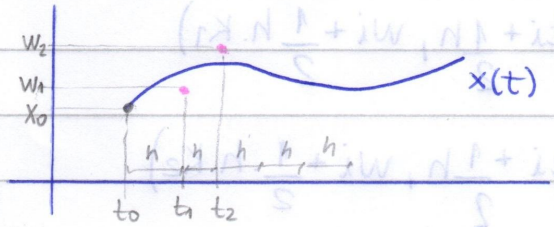
$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ → Runge-Kuta de 2ª ordem p/ isso

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}.(w_i + w_i + h.w_i)$$

$$w_0 = 1$$

Runge-Kuta 4ª ordem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Lembre que w_i é aproximação de $x(t_i)$ e os métodos tem a propriedade que confere $h \to 0$, $w_i \to x(t_i)$

$$(*^1)\ x(t_{i+1}) = x(t_i) + \underbrace{\dot{x}(t_i)}_{f(t_i, x(t_i))} \cdot h + \underbrace{\ddot{x}(t_i)}_{\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x(t_i)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x(t_i)) \cdot f(t_i, x(t_i))} \cdot \frac{h^2}{2} + \underbrace{\dddot{x}(t_i)}_{*} \cdot \frac{h^3}{6} + \ddddot{x}(t_i) \cdot \frac{h^4}{24}$$

método de 4ª ordem geral

* escreve em função de f e sua derivada ($\dddot{x}$)

A ideia do Runge-Kuta é:

$(*^2)\ x(t_{i+1}) = x(t_i) + h.(a.K_1 + b.K_2 + c.K_3 + d.K_4)$, onde

$K_1 = f(t_i, x_i)$ $\quad (x_i = x(t_i))$

$K_2 = f(t_i + p.h, x_i + q.h.K_1)$

$K_3 = f(t_i + r.h, x_i + s.h.K_2)$

$K_4 = f(t_i + m.h, x_i + e.h.K_3)$

Se igualarmos $(*^1)$ e $(*^2)$, achamos quanto valem a, b, c, d, p, q, r, s, m e l.

Os números anteriores tem que satisfazer certas relações e a escolha (em que se arbitra tais números coerentemente), chamada Runge-Kuta de 4ª ordem, é a seguinte:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \text{ onde}$$

$K_1 = f(t_i, w_i)$

$K_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}h.K_1)$

$K_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}.h.K_2)$

$K_4 = f(t_i + h, w_i + h.K_3)$

Exercício 1

Usando o método dos Trapézios aproxime π com erro $< 10^{-3}$ usando $f(x) = 1/(1+x^2)$ e integrando-a num intervalo adequado.

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{arctg}(b) - \text{arctg}(a) = \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

- $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ temos que calcular essa integral com erro $< 10^{-3}$

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{\left[-8(1+x^2)^2 + 32(1+x^2).x^2\right]}{(1+x^2)^4}$$

$|f''(x)| \leq$ max (esse máximo estimado é feito com o pior caso possível, apesar de o que o professor usa aqui não existir – ser maior do que o máximo real – isso apenas tornará o n um pouco maior, mas não tem problema)

$$\leq \frac{8.4 + 32.2.1}{1} = 96$$

Agora:

$\frac{96(1-0)^3}{12n^2} < 10^{-3}$, $n \geq \ldots$ (calcule)

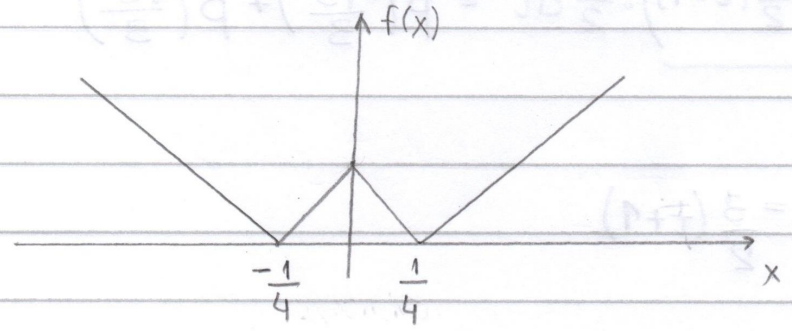
$h = \frac{1-0}{n}$, $\text{Aprox} = \frac{h}{2}.(f(0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(1))$ //

Em um ex. de análise harmônica, era possível desenhar o seguinte gráfico:

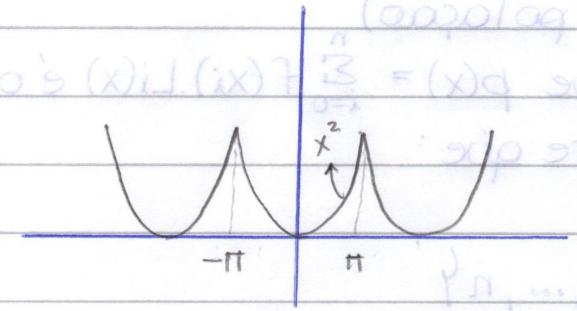
$f(x) = \big||x| - 1/4\big|$

$\to x > 0 \to f(x) = |x - 1/4|$

$\to x < 0 \to f(x) = |-x - 1/4| = |x + 1/4|$



Sugestão: Faça a análise harmônica de



$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cdot \cos 2x + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercício 2

Mostre que $\int_{-1}^{1} p(x) = p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, para p pol. de grau ≤ 3.

Seja $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \to \int_{-1}^{1} p\,dx = 2a_0 + \frac{2}{3} a_2$

$$p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = a_0 + \cancel{a_1 \frac{\sqrt{3}}{3}} + a_2 \cdot \frac{1}{3} + \cancel{a_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3} + a_0 + \cancel{a_1 \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)} + a_2 \cdot \frac{1}{3} + \cancel{a_3 \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^3}$$

$$= 2a_0 + \frac{2a_2}{3}$$

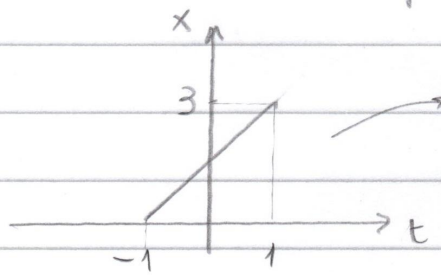
c.q.d.

Exercício 2b

$$\int_0^3 (x^3 - 2x)\,dx$$

Usando a dedução anterior calcule

$$\int_0^3 (x^3-2x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{\left(\frac{3}{2}(t+1)\right)^3 - 2.\left(\frac{3}{2}(t+1)\right)}_{p(t)} \cdot \frac{3}{2}\,dt = p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$



$$x(t) = \frac{3}{2}(t+1)$$

Exercício 3 (16 da lista de interpolação)

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Sabemos que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i).L_i(x)$ é o polinômio interpolador de f. Mostre que:

a) $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{i=0}^{n} L_i(0).x_i^k = 0, \ \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

a) $$L_3(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2).(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_0).(x_3-x_1).(x_3-x_2).(x_3-x_4)\dots(x_3-x_n)}$$

x_0	1
x_1	1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	1

$p_{int}(x) = 1.L_0(x) + 1.L_1(x) + \dots + 1.L_n(x)$, grau $\leq n$

Como $q(x) = 1$ é pol. de grau 0 que interpole a tabela e o polinômio interpolador é único, então $\Rightarrow$ $p_{int}(x) = 1$.

b) $f(x) = x^k$, pol de grau $k \leq n$ ← por definição

x_0	x_0^k
x_1	x_1^k
x_2	x_2^k
$\vdots$	$\vdots$
x_n	x_n^k

$pint(x) = x_0^k \cdot L_0(x) + \ldots + x_n^k \cdot L_n(x)$

$Pol(0) = 0^k$, pois x^k e $pint(x)$ interpola a tabela e tem grau $\leq n$, ∴ são iguais.