AULA 1 (19/04) ①

MAP3121 · PARA P2

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

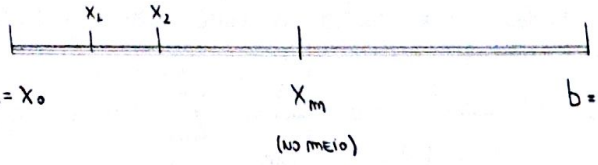
- MMQ (A CONTINUAÇÃO)

(A) ANÁLISE HARMÔNICA DISCRETA

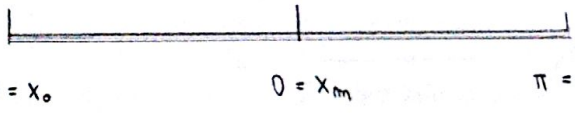
↳ 1ª PERGUNTA: QUANDO A ANÁLISE HARMÔNICA DISCRETA É APLICÁVEL?

→ APLICÁVEL QUANDO TEMOS $x_0, x_1, \dots, x_m, \dots, x_{2m}$ PONTOS (OU SEJA, UM NÚMERO ÍMPAR DE PONTOS) REGULARMENTE ESPAÇADOS. (ISTO É, $x_i - x_{i-1} = x_j - x_{j-1} > 0$; PARA $\forall\ i, j \geq 1$)

↳ DESENVOLVIMENTO: CHAME $a = x_0$ e $b = x_{2m}$



→ VAMOS COMEÇAR COM O CASO PARTICULAR EM QUE $a = -\pi$ E $b = \pi$.

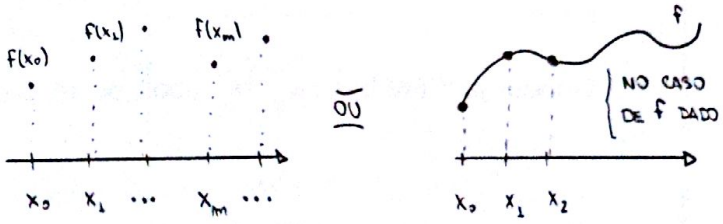


→ DEVEMOS CONSTRUIR UMA TABELA DE PARA O AJUSTE DE MMQ

x	x_0	x_1	x_2	x_3	⋯	⋯	x_m	⋯	⋯	x_{2m}
y	y_0	y_1	y_2	y_3	⋯	⋯	y_m	⋯	⋯	y_{2m}

PODEMOS CHAMAR: $y_i = f(x_i)$

→ DESSA MANEIRA O QUE TEMOS ATÉ ENTÃO É:



↳ 2° PERGUNTA: QUAL VAI SER A COMBINAÇÃO LINEAR DE FUNÇÕES PARA O MMQ?

$$y = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_k g_k(x)$$

I) y ISOLADO EM RELAÇÃO A x CHAMAMOS DE "AJUSTE DE FUNÇÃO";

II) SE ACALME, PEQUENO PADAWAN, MAS P/ FRENTE ENTENDEREMOS QUE SÃO AS $g(x)$!

→ VIMOS QUE $a_1, a_2, \dots, a_k$ SAEM COMO SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR E REPARE QUE ISSO NÃO TEM RELAÇÃO COM O INTERVALO $[a, b]$:

$$\begin{cases} \langle g_1, g_1 \rangle a_1 + \dots + \langle g_1, g_k \rangle a_k = \langle g_1, y \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle a_1 + \dots + \langle g_1, g_k \rangle a_k = \langle g_2, y \rangle \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \langle g_k, g_1 \rangle a_1 + \dots + \langle g_k, g_k \rangle a_k = \langle g_k, y \rangle \end{cases}$$

→ GRANDE VANTAGEM: SE AS FUNÇÕES g_ℓ SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI: $\langle g_\ell, g_j \rangle = 0$ se $\ell \neq j$

DESSA MANEIRA, TUDO FORA DA DIAGONAL PRINCIPAL SERÁ IGUAL A ZERO E:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\langle g_1, y \rangle}{\langle g_1, g_1 \rangle} \\ a_2 = \dfrac{\langle g_2, y \rangle}{\langle g_2, g_2 \rangle} \\ \vdots \\ a_k = \dfrac{\langle g_k, y \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} \end{cases}$$

↳ 3ª PERGUNTA: QUAIS SÃO AS FAMÍLIAS DE VETORES ORTOGONAIS?

→ UMA FAMÍLIA PARA OS PONTOS $x_0 = -\pi, \dots, x_{2m} = \pi$ COMO INTERNO CANÔNICO (PESOS UNIFORMES):

$$\begin{cases} 1 \\ \cos x, \ \operatorname{sen} x \\ \cos(2x), \ \operatorname{sen}(2x) \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} \vdots \\ \cos((m-1)x), \ \operatorname{sen}((m-1)x) \\ \cos(mx) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

→ $2m+1$ PONTOS DE ABSCISSAS $x_0, x_1 \dots x_{2m}$, MAS O x_{2m} NÃO É CONSIDERADO, POIS É IMPLÍCITO QUE HÁ UMA PERIODICIDADE ENVOLVIDA. É COMO SE x_{2m} FOSSE O x_0 E VAI SER ESQUECIDO.

→ PRODUTO INTERNO g, h FUNÇÕES DEFINIDAS PARA ESSES PONTOS:

$$\langle g, h \rangle = \sum_{i=0}^{2m-1} g(x_i) \cdot h(x_i)$$

$$g = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_{2m-1}) \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} h(x_0) \\ h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_{2m-1}) \end{pmatrix}$$

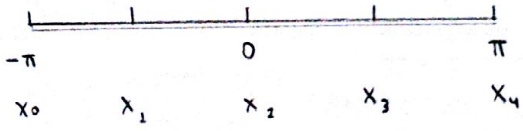
PORTANTO, ESTAMOS TRABALHANDO NO $\mathbb{R}^{2m}$

O MAIOR CONJUNTO LINEARMENTE INDEPENDENTE ORTOGONAL DE VETORES EM $\mathbb{R}^{2m}$ TEM $2m$ VETORES (FUNÇÕES).

↳ 4ª PERGUNTA: POR QUE $\operatorname{sen}(mx)$ NÃO PODE ENTRAR?

$$\underbrace{\operatorname{sen}(m x_i) = 0}_{\text{VETOR NULO}}, \quad \forall \quad i = 0, 1, \dots, 2m$$

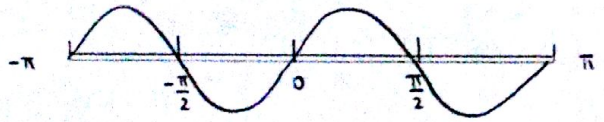
EXEMPLO 1: $m = 2$



$\operatorname{sen}(mx) = \operatorname{sen}(2x)$

↳ sen SE ANULA NO MÚLTIPLO DE π

↳ $\operatorname{sen}(2x)$ SE ANULA NO MÚLTIPLO DE $\frac{\pi}{2}$



↳ 5ª PERGUNTA: PRECISAMOS CONHECER OUTRA INFORMAÇÃO NECESSÁRIA: $\langle g_\ell, g_\ell \rangle = ?$

$\langle 1, 1 \rangle = 2m$ AS DEMAIS

$\langle \cos(\ell x), \cos(\ell x) \rangle = m$ PARA $\ell = 1, 2, \dots, m$

$\langle \operatorname{sen}(\ell x), \operatorname{sen}(\ell x) \rangle = m$ PARA $\ell = 1, 2, \dots, m$

→ SUPONHA QUE ESCREVAMOS A FUNÇÃO DE AJUSTE ASSIM:

$$a_0 + \sum_{s=1}^{m} a_s \cos(sx) + \sum_{s=1}^{m} b_s \operatorname{sen}(sx)$$

→ E ESTAMOS AJUSTANDO UMA f (QUE DÁ OS VALORES DE y)

→ ENTÃO, POR TUDO O QUE FOI DITO ACIMA.

$$a_0 = \frac{\langle 1, f \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} f(x_i)$$

É A MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES DOS VALORES DE f.

→ $a_s = \dfrac{\langle \cos(sx), f \rangle}{\langle \cos(sx), \cos(sx) \rangle} \Rightarrow$

$$a_s = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1} f(x_i) \cdot \cos(s x_i) \qquad s = 1, 2, \dots, m$$

E

$$b_s = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1} f(x_i) \cdot \operatorname{sen}(s x_i) \qquad s = 1, 2, \dots, m$$

→ USAREMOS MUDANÇA DE COORDENADAS

Scanned by CamScanner

AULA 2 (26/04) ①

MAP 3121 PARA P2

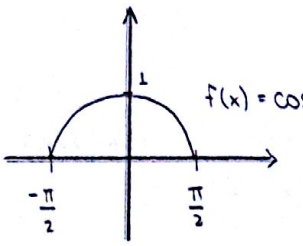
PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

- MMQ DISCRETO : ANÁLISE HARMÔNICA

↳ O PROFESSOR RETORNARÁ EM BREVE COM ESSE ASSUNTO.

- MMQ CONTÍNUO

EXEMPLO: APROXIMAR COSX NO INTERVALO $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ POR UMA PARÁBOLA SIMÉTRICA EM RELAÇÃO AO EIXO DAS ORDENADAS:



PODEMOS APROXIMAR

$y = f(x) \approx b_0 + b_1 x^2$

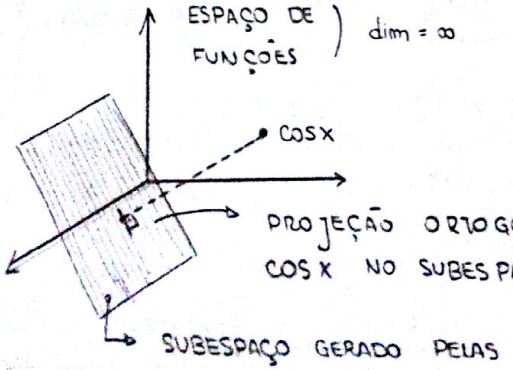
(NÃO TEM O GRAU 1 POR CAUSA DA SIMETRIA IMPOSTA)

PERGUNTA: QUAL É O MELHOR PARA DE PARÂMETROS (b_0, b_1)?

RESPOSTA: O MELHOR PARÂMETRO É AQUELE QUE MINIMIZA A "DISTÂNCIA" ENTRE $f(x)=\cos x$ E $b_0 + b_1 x^2$.

ASSIM: $\sqrt{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{p(x)}_{\text{FUNÇÃO PESO}} \left(f(x) - [b_0 + b_1 x^2] \right)^2 . dx}$ É

DISTÂNCIA DEFINIDA NUM ESPAÇO DE FUNÇÃO



→ A ORTOGONALIDADE SE REFERE AO PRODUTO INTERNO

$$\underbrace{\langle u, v \rangle}_{\text{FUNÇÕES}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(x) . u(x) . v(x)\, dx$$

→ OS COEFICIENTES QUE DÃO A PROJEÇÃO ORTOGONAL DE $f(x)$ SOBRE O SUBESPAÇO SÃO A SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR:

$$\begin{cases} \langle 1, 1 \rangle b_0 + \langle 1, x^2 \rangle b_1 = \langle 1, f(x) \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle b_0 + \langle x^2, x^2 \rangle b_1 = \langle x^2, f(x) \rangle \end{cases}$$

° COMPARANDO: DIFERENÇA DO CONTÍNUO PARA O DISCRETO:

DISCRETO	CONTÍNUO
$x_i \quad i = 1,2,3 \ldots m$	$x \in [a, b]$
$y_i \quad i = 1,2,3 \ldots m$	$y = f(x)$
$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i u_i v_i$	$\langle u, v \rangle = \int_a^b p(x) u(x) v(x) dx$

CONTINUAÇÃO DO EXEMPLO: NO NOSSO PROBLEMA SUPONHA $p(x) = 1$ (PESO UNIFORME)

1° PASSO: CALCULANDO OS COEFICIENTES DO SISTEMA

I) $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 1 . 1\, dx = \pi$

II) $\langle 1, x^2 \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 1 . x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{12}$

III) $\langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2 . x^2\, dx = \left[\frac{x^5}{5} \right] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^5}{80}$

IV) $\langle 1, \cos x \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2$

Scanned by CamScanner

IV) $\langle x^2, \cos x \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx = I$

* POR PARTES:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{dv} \, dx = x^2 \operatorname{sen} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x \, dx}_{dv}$$

$(v = \operatorname{sen} x)$ $\qquad$ $(v = -\cos x)$

DESENVOLVENDO: $I = \frac{\pi^2}{2} - 4$

SISTEMA QUE SERÁ TRABALHADO:

$$\begin{cases} \langle 1, 1 \rangle b_0 + \langle 1, x^2 \rangle b_1 = \langle 1, f(x) \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle b_0 + \langle x^2, x^2 \rangle b_1 = \langle x^2, f(x) \rangle \end{cases} \Rightarrow$$

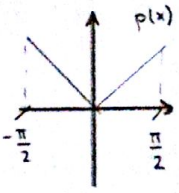
$$\begin{cases} \pi b_0 + \frac{\pi^3}{12} b_1 = 2 \\ \frac{\pi^3}{12} b_0 + \frac{\pi^5}{80} b_1 = \frac{\pi^2}{2} - 4 \end{cases}$$

QUESTÕES A SEREM RESPONDIDAS:

Ⓐ USANDO 4 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS RESOLVER POR DECOMPOSIÇÃO L.U.

Ⓑ PLOTAR $\cos x$ JUNTO COM A FUNÇÃO $b_0 + b_1 x^2$ OBTIDA NO AJUSTE.

Ⓒ USE $p(x) = |x|$, RECALCULE TUDO E COMPARE AS SOLUÇÕES.



EXEMPLO

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p(x) \cdot 1 \cdot 1 \, dx \rightarrow$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x| \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \frac{\pi^2}{4}$$

• ANÁLISE HARMÔNICA - CONTÍNUA

A) CASO PARTICULAR $[-\pi, \pi]$

→ FAMÍLIA DE FUNÇÕES ORTOGONAIS PARA UM PESO UNIFORME.

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \cos x, \operatorname{sen} x \\ \cos(2x), \operatorname{sen}(2x) \\ \cos(3x), \operatorname{sen}(3x) \\ \vdots \quad \vdots \end{matrix}}_{\text{INFINITAS SOLUÇÕES}}$$

PRODUTO INTERNO ENTRE DUAS DELAS É = 0

- $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx = 2\pi$

- $\langle \cos(k\pi), \cos(k\pi) \rangle = \pi = \langle \operatorname{sen}(k\pi), \operatorname{sen}(k\pi) \rangle$

↳ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \pi$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

EXEMPLO: APROXIMAR $f(x) = 1 - |x|$ AO INTERVALO $[-\pi, \pi]$ POR:

$$\underbrace{a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen}(2x)}_{\text{APROXIMAÇÃO DE ORDEM 2}}$$

ORTOGONALIDADE SISTEMA DIAGONAL!

$$\langle 1, 1 \rangle a_0 = \langle 1, f \rangle$$

$$\langle \cos x, \cos x \rangle a_1 = \langle \cos x, f \rangle$$

$$\vdots$$

ENTÃO:

$$a_0 = \frac{\langle 1, f \rangle}{2\pi} \qquad a_2 = \frac{\langle \cos(2x), f \rangle}{\pi} \qquad b_2 = \frac{\langle \operatorname{sen}(2x), f \rangle}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{\langle \cos x, f \rangle}{\pi} \qquad b_1 = \frac{\langle \operatorname{sen} x, f \rangle}{\pi}$$

Scanned by CamScanner

AULA 2 (26/04) ③

$f(x) = 1 - |x|$ É PAR sem x É ímpar | $f(x)\sin x$ É ímpar

ENTÃO: $\boxed{b_1 = 0}$ ④ e $\boxed{b_2 = 0}$ ⑤

Ⓒ $\langle 1, f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{(1-|x|)}_{\text{PAR}}\, dx = 2\int_0^{\pi} \underbrace{(1-|x|)}_{\downarrow}\, dx =$

PARTE POSITIVA

$2\int_0^{\pi}(1-x)\,dx = 2\pi - \pi^2$

ENTÃO: $a_0 = \dfrac{\langle 1, f\rangle}{2\pi} = \dfrac{2\pi - \pi^2}{2\pi} \Rightarrow \boxed{a_0 = 1 - \frac{\pi}{2}}$

Ⓓ $\langle \cos x, f\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{(1-|x|)}_{\text{PAR}} \underbrace{\cos x}_{\text{PAR}}\, dx = 2\int_0^{+\pi}(1-x)\cos x\,dx$

$= 2\left\{ \int_0^{\pi}\cos x\,dx - \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} \right\} = 4$

$V = \sin x$

ENTÃO: $a_1 = \dfrac{\langle \cos x, f\rangle}{\pi} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{4}{\pi}}$

Ⓔ $\langle \cos(2x), f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(1-|x|)\cos(2x)\,dx =$

$2\left\{ \int_0^{\pi}\cos(2x)\,dx - \int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(2x)\,dx}_{dv} \right\} = 0$

$V = \frac{1}{2}\sin(2x)$

ENTÃO: $\boxed{a_2 = 0}$

SE ESTIVERMOS CERTOS ✓ ok

$\underbrace{a_0}_{1-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{a_1}_{\frac{4}{\pi}} + \underbrace{a_2}_{0} \approx \underbrace{f(0)}_{1}$

Scanned by CamScanner

AULA 3
28/04
①

MAP3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

↳ OBSERVAÇÃO VAMOS ADIAR MAIS UM POUCO A MUDANÇA DE VARIÁVEIS DOS MMQ's:

PARA APLICAR EM { ANÁLISE HARMÔNICA - DISCRETA - CONTÍNUA; POLINÔMIOS ORTOGONAIS

• POLINÔMIOS ORTOGONAIS:

◦ CONTEXTO: É DADO UM PRODUTO INTERNO, DISCRETO OU CONTÍNUO

◦ HIPÓTESE FUNDAMENTAL: $\langle x f(x), g(x) \rangle$ SERÁ IGUAL A $\langle f(x), x g(x) \rangle$

→ TODOS OS PRODUTOS INTERNOS QUE NÓS TEMOS USADOS SATISFAZEM ESSA CONDIÇÃO

◦ DISCRETO: $\langle f, g \rangle = \sum_i p_i f(x_i) g(x_i)$

$$\boxed{\langle xf, g \rangle} = \sum_i p_i (x_i f(x_i)) g(x_i) = \sum_i p_i f(x_i)(x_i g(x_i)) = \boxed{\langle f, xg \rangle}$$

◦ CONTÍNUO: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

$$\boxed{\langle xf, g \rangle} = \int_a^b [xf(x)] g(x)\, dx = \int_a^b f(x)[xg(x)]\, dx = \boxed{\langle f, xg \rangle}$$

◦ OBJETIVO: ACHAR FAMÍLIAS DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS ENTRE SI ⇒ SISTEMA LINEAR DO MMQ FICA DIAGONAL, COMO NA ANÁLISE HARMÔNICA

◦ CONSTRUÇÃO DO MÉTODO (ROTEIRO)

1° PASSO: CONSTRUIR $p_0, p_1, p_2, p_3 \dots$ POR RECURSÃO

↓

ESSA RECURSÃO VAI ENVOLVER DOIS PASSOS ANTERIORES: p_{J+1} VAI DEPENDER DE p_J E p_{J-1}

2° PASSO: DEFINIR:

↳ p_0 E p_1 VÃO SER DETERMINADOS NO "BRAÇO". NA VERDADE, ESCOLHEREMOS $p_0 = 1$ E p_1 VAI SER CALCULADO PARA QUE $\langle p_1 ; 1 \rangle = 0$

3° PASSO: LEMBRAR QUE:

↳ O GRAU DE p_J É J.

↳ O COEFICIENTE LÍDER DE J SERÁ SEMPRE IGUAL A 1:

$$p_J(x) = 1 x^J + \underbrace{\dots}_{\text{GRAU } J-1}$$

4° PASSO: REALIZAR O MÉTODO:

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x + a \end{cases}$$

↳ VAMOS ENCONTRAR a ATRAVÉS DA IMPOSIÇÃO DE $\langle p_0, p_1 \rangle = 0$

$$\langle p_0, p_1 \rangle = \langle 1, x + a \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle 1, x \rangle + \langle 1, a \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle 1, x \rangle + a \langle 1, 1 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$a = -\frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}$$

5° PASSO: RECURSÃO

Scanned by CamScanner

↳ $j \geq 1$ E SUPONHA JÁ CONSTRUÍDOS OS POLINÔMIOS $p_0, p_1 \cdots, p_j$

↳ VAMOS OBTER p_{j+1}

↳ LEMBRE QUE $x p_j$ TEM GRAU $(j+1)$ (EM PARTICULAR, NÃO PODE SER COMBINAÇÃO LINEAR EM $p_0, p_1, \cdots, p_j$)

↳ HIPÓTESE: $\langle x p_j , p_{j-2} \rangle = \langle p_j , \underbrace{x p_{j-2}}_{(\text{GRAU } j-1)} \rangle$

$p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{j-1}$ SÃO LINEARMENTE INDEPENDENTE E, PELA QUANTIDADE, TÊM QUE SER UMA BASE DO ESPAÇO DE POLINÔMIOS DE GRAU $\leq j-1$

↳ BASE ORTOGONAL DE $\mathcal{P}_{j-1}$

↳ ISTO É: $\dim \mathcal{P}_{j-1} = j$; $p_0, p_1, \cdots, p_{j-1}$ SÃO j POLINÔMIOS ORTOGONAIS, OU SEJA, É BASE.

↳ PORTANTO:

$\underbrace{x p_{j-2}}_{\in \mathcal{P}_{j-1}} = \underbrace{\gamma_0 p_0 + \gamma_1 p_1 + \cdots + \gamma_{j-1} p_{j-1}}_{\text{COMBINAÇÃO LINEAR DA BASE}}$

↳ LOGO:

$\langle x p_j , p_{j-2} \rangle = \langle p_j , x p_{j-2} \rangle =$

$\langle p_j , \gamma_0 p_0 + \gamma_1 p_1 + \cdots + \gamma_{j-1} p_{j-1} \rangle =$

$\gamma_0 \langle p_j , p_0 \rangle + \gamma_1 \langle p_j , p_1 \rangle + \cdots + \gamma_{j-1} \langle p_j , p_{j-1} \rangle$

FAZ PARTE DA HIPÓTESE RECURSIVA QUE $p_0, p_1, \cdots, p_j$ SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI

$\Rightarrow \langle x p_j , p_{j-2} \rangle = 0$

↳ ANALOGAMENTE: $\boxed{\langle x p_j , p_\ell \rangle = 0 \quad \ell = 0, 1, \cdots, j-2}$

↳ QUEREMOS $p_{j+1} = x^{j+1} \oplus$ TERMOS ATÉ GRAU j E $\langle p_{j+1} , p_j \rangle = \langle p_{j+1} , p_{j-1} \rangle = \langle p_{j+1} , p_{j-2} \rangle = 0$

↳ VEJA QUE $x \cdot p_j$ TEM GRAU $(j+1)$, TEM COEFICIENTE DE x^{j+1} IGUAL A 1, E É ORTOGONAL A $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{j-2}$. MAS FALTOU A ORTOGONALIDADE PARA p_{j-1} E p_j. ENTÃO É PRECISO FAZER ALGO, POR EXEMPLO, SOMAR ALGUMA COISA:

↳ TOME: $\underbrace{x p_j + \alpha p_j + \beta p_{j-1}}$

SERÁ QUE TEMOS α E β TAIS QUE ESSE POLINÔMIO É ORTOGONAL A p_{j-1} E A p_j?

↳ OBSERVE QUE ESSE POLINÔMIO AINDA É ORTOGONAL A $p_0, p_1, \cdots, p_{j-2}$

$\langle x p_j + \alpha p_j + \beta \cdot p_{j-1} , p_\ell \rangle =$

↳ $\ell = 0, 1, 2 \cdots j-2$

$= \underbrace{\langle x p_j , p_\ell \rangle}_{=0 \text{ (JÁ VIMOS)}} + \alpha \underbrace{\langle p_j , p_\ell \rangle}_{=0 \ (\ell \leq j-2)} + \beta \underbrace{\langle p_{j-1} , p_\ell \rangle}_{=0 \ (\ell < j-1)}$

↳ PRECISAMOS DE

(1) $\langle x p_j + \alpha p_j + \beta \cdot p_{j-1} , p_{j-1} \rangle = 0$

(2) $\langle x p_j + \alpha p_j + \beta p_{j-1} , p_j \rangle = 0$

Scanned by CamScanner

AULA 3
28/04
③

(1) $\langle x p_j , p_{j-1} \rangle + \underbrace{\alpha \langle p_j , p_{j-1} \rangle}_{=0 \text{ PELA ORTOGONALIDADE ATÉ }} + \beta \langle p_{j-1} p_{j-1} \rangle$

$$\boxed{\beta = - \frac{\langle x p_j , p_{j-1} \rangle}{\langle p_{j-1} , p_{j-1} \rangle}}$$

(2) $\langle x p_j , p_j \rangle + \alpha \langle p_j , p_j \rangle + \underbrace{\beta \langle p_j , p_{j-1} \rangle}_{=0 \text{ PELA ORTOGONALIDADE ATÉ }}$

$$\boxed{\alpha = - \frac{\langle x p_j , p_j \rangle}{\langle p_j , p_j \rangle}}$$

↳ CONCLUSÃO: O p_{j+1} PROCURADO É:

$$\boxed{p_{j+1}(x) = x p_j(x) - \frac{\langle x p_j , p_j \rangle}{\langle p_j , p_j \rangle} p_j(x) - \frac{\langle x p_j , p_{j-1} \rangle}{\langle p_{j-1} , p_{j-1} \rangle} p_{j-1}(x)}$$

↳ NO FUNDO, PEGAMOS $x p_j$ FORA GERADO POR $p_0, p_1, \dots, p_j$ E SUBTRAÍMOS A PROJEÇÃO ORTOGONAL DE $x p_j$ NESSE ESPAÇO. (MÉTODO DE GRAN-SCHIMIDT)

6° PASSO: FAZER UM EXEMPLO PARA ENTEDER TUDO:

EXEMPLO: Em $[0,1]$ $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

- $p_0(x) = 1$
- $p_1(x) = x + a$

O TERMO "a" SERÁ ENCONTRADO ATRAVÉS DE:

$$a = - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = - \frac{\int_0^1 x \, dx}{\int_0^1 1 \, dx} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

OU SEJA, O POLINÔMIO $\boxed{p_1(x) = x - \frac{1}{2}}$

$p_2(x)$ SERÁ ENCONTRADO ATRAVÉS

$$p_2(x) = x p_1(x) - \frac{\langle x p_1 , p_1 \rangle}{\langle p_1 , p_1 \rangle} p_1(x) - \frac{\langle x p_0 , p_0 \rangle}{\langle p_0 , p_0 \rangle} p_0(x)$$

ENCONTRANDO CADA TERMO:

- $\langle p_0 , p_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \, dx = \underline{1}$
- $\langle p_1 , p_1 \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2 du = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}$

SUBSTITUIÇÃO: $u = x - \frac{1}{2}$

PORTANTO $\langle p_1 , p_1 \rangle = \frac{1}{12}$

- $\langle x p_1 , p_0 \rangle = \int_0^1 x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
- $\langle x p_1 , p_1 \rangle = \int_0^1 x \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx =$

$$\int_0^1 \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{4} x\right) dx = \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}_{} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

PORTANTO:

$$p_2(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{12}}{1} \cdot 1$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$\boxed{p_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}}$$

EXERCÍCIO: CALCULAR $p_3(x)$

OBSERVAÇÃO: SE PRODUTO INTERNO É DISCRETO (N PONTOS), ISSO PARA EM p_{N-1}, SE É CONTÍNUA, A SEQ. É INFINITA.

Scanned by CamScanner

AULA 4
03/05
①

MAP3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

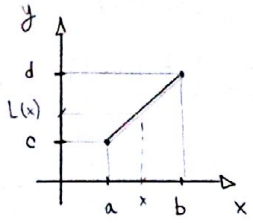
• MUDANÇA DE VARIÁVEIS

◦ MUDANÇA AFIM, ISTO É: RETA

$$x \longmapsto \alpha x + \beta$$

◦ PRESERVAÇÃO DE ORIENTAÇÃO: $\alpha > 0$

◦ LEVA INTERVALO $[a,b]$ em $[c,d]$



$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$$

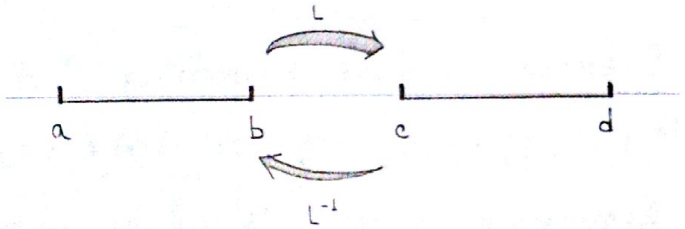
$$\boxed{L(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)}$$

* INVERSA DE L: ÚNICA AFIM QUE PRESERVA ORIENTAÇÃO E LEVA $[c,d]$ em $[a,b]$:

$$\boxed{L^{-1}(x) = a + \frac{b-a}{d-c}(x-c)}$$

OBSERVAÇÃO: VERIFIQUE QUE $L(L^{-1}(x)) = x$, OU SEJA, $L \circ L^{-1} = Id$.

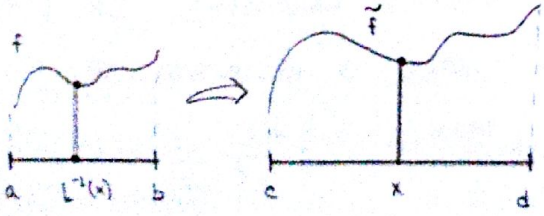
◦ REPARE NA IDEIA DO QUE SERÁ APRENDIDO:



OBSERVAÇÃO: NÃO HÁ NENHUM PROBLEMA SE $[a,b]$ INTERSECTAR $[c,d]$. É SÓ UM DESENHO!

◦ TRANSFERIR FUNÇÕES:

↳ SUPONHA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$:



DILATAÇÃO/CONTRAÇÃO HORIZONTAL DO GRÁFICO DE f

◦ PERGUNTA: QUEM É $\tilde{f}$?

$$\boxed{\tilde{f}(x) = f(L^{-1}(x))}$$

↳ A FUNÇÃO INVERSA É CAPAZ DE MANTER A PROPORÇÃO MESMO NUMA DILATAÇÃO OU CONTRAÇÃO

$$\tilde{f}(L(x)) = f(L^{-1}(L(x)))$$

NO LUGAR DE x

$$\tilde{f}(L(x)) = f(x)$$

◦ ANALOGAMENTE:

$$\boxed{f(x) = \tilde{f}(L(x))}$$

◦ OBSERVAÇÃO:

① f POLINÔMIO DE GRAU m $\iff$ $\tilde{f}$ POLINÔMIO DE GRAU m

② SUPONHA QUE $f(x) = A\operatorname{sen}(kx) + B\cos(kx)$

$$f(\alpha x + \beta) = \underbrace{\tilde{A}}_{A\cos(k\beta) - B\operatorname{sen}(k\beta)} \operatorname{sen}(k\alpha x) + \underbrace{\tilde{B}}_{A\operatorname{sen}(k\beta) + B\cos(k\beta)} \cos(k\alpha x)$$

DESENVOLVENDO:

$$f(\alpha x + \beta) = A\operatorname{sen}(k(\alpha x + \beta)) + B\cos(k(\alpha x + \beta))$$

$$f(\alpha x + \beta) = A\operatorname{sen}(k\alpha x + k\beta) + B\cos(k\alpha x + k\beta)$$

$$f(\alpha x + \beta) = A[\operatorname{sen}(k\alpha x)\cos(k\beta) + \cos(k\alpha x)\operatorname{sen}(k\beta)] + B[\cos(k\alpha x)\cos(k\beta) - \operatorname{sen}(k\alpha x)\operatorname{sen}(k\beta)]$$

$$f(\alpha x + \beta) = \underbrace{(A\cos(k\beta) - B\operatorname{sen}(k\beta))}_{\tilde{A}} \operatorname{sen}(k\alpha x) + \underbrace{(A\operatorname{sen}(k\beta) + B\cos(k\beta))}_{\tilde{B}} \cos(k\alpha x)$$

$$\boxed{f(\alpha x + \beta) = \tilde{A}\operatorname{sen}(k\alpha x) + \tilde{B}\cos(k\alpha x)}$$

③ $\displaystyle\int_c^d \tilde{f}(x)\,dx \Rightarrow$ PALPITE: $\displaystyle\frac{d-c}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

DESENVOLVENDO:

$$\int_c^d \tilde{f}(x)\,dx = \int_c^d f(\underbrace{L^{-1}(x)}_{u})\,dx$$

Scanned by CamScanner

SUBSTITUIÇÃO: $u = L^{-1}(x)$ | $c \to L^{-1}(c) = a$

$du = \underbrace{\frac{dL^{-1}}{dx}}\, dx$ | $d \to L^{-1}(d) = b$

DEFINIDA: $\frac{b-a}{d-c} \Rightarrow dx = \frac{d-c}{b-a}\, du$

ENTÃO: $\int_c^d \tilde{f}(x)\,dx = \int_c^d f(\underbrace{L^{-1}(x)})\,dx =$

$\int_a^b f(u)\,\frac{d-c}{b-a}\,du = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b f(u)\,du$

Ⅳ SUPONHA O PRODUTO INTERNO:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \underbrace{w(x)}_{\text{PESO}} \cdot f(x) \cdot g(x)$$

↳ SE f E g SÃO ORTOGONAIS PARA ESSE PRODUTO INTERNO, ENTÃO: $\tilde{f} = f \circ L^{-1}$, $\tilde{g} = g \circ L^{-1}$ SÃO ORTOGONAIS PARA O PRODUTO INTERNO:

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \int_c^d \underbrace{\tilde{w}(x)}_{\text{ONDE: } \tilde{w}(x) = w(L^{-1}(x))} \cdot \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)\,dx$$

↳ POR QUÊ?

$$\int_c^d \tilde{w}(x) \cdot \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b w(x) \cdot f(x) \cdot g(x)\,dx$$

↳ SE UMA É ZERO ENTÃO A OUTRA TAMBÉM É.

↳ SE $w(x) = 1$ ENTÃO $\tilde{w}(x) = 1$

EXEMPLO: 1, $x - \frac{1}{2}$ E $x^2 + x - \frac{1}{6}$ SÃO POLINÔMIOS ORTOGONAIS PARA O PRODUTO INTERNO $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,dx$

ACHE OS POLINÔMIOS CORRESPONDENTES PARA $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\,dx$

1° PASSO: $[0, 1] \xrightarrow{L} [-1, 1]$

$$\begin{cases} L(x) = -1 + 2x \\ L^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+1) \end{cases}$$

2° PASSO:

① $p_0 = 1 \Rightarrow \tilde{p}_0 = p_0 \circ L^{-1} = \boxed{1}$

② $p_1 = x - \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{p}_1 = p_1(L^{-1}(x)) \to$

$\tilde{p}_1 = p_1\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) \to$

$\tilde{p}_1 = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2} \to$

$\tilde{p}_1 = \boxed{\frac{x}{2}}$

③ $p_2 = x^2 + x - \frac{1}{6} \Rightarrow \tilde{p}_2 = p_2(L^{-1}(x)) \to$

$\tilde{p}_2 = (L^{-1}(x))^2 + (L^{-1}(x)) - \frac{1}{6} \to$

$\tilde{p}_2 = \left[\frac{1}{2}(x+1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(x+1)\right] - \frac{1}{6}$

$\tilde{p}_2 = \boxed{\frac{x^2}{4} + x + \frac{7}{12}}$

EXEMPLO: ANÁLISE HARMÔNICA. SUPONHA $f: [2,5] \to \mathbb{R}$ DADA POR $f(x) = x - \frac{7}{2}$

APRENDEMOS A FAZER A ANÁLISE HARMÔNICA (PRODUTO CANÔNICA) DE $-\pi$ A π.

⇒ ROTEIRO:

1° PASSO: $f \to \tilde{f}$ EM $[-\pi, \pi]$

2° PASSO: ANÁLISE HARMÔNICA EM $[-\pi, \pi]$

3° PASSO: TRAZER O RESULTADO DE VOLTA PARA $[2, 5]$

Scanned by CamScanner

AULA 4
03/05
③

1° PASSO:

$L : [2,5] \longrightarrow [-\pi, \pi]$

$x \longrightarrow \frac{\pi}{\frac{3}{2}}\left(x - \frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(x - \frac{7}{2}\right)$ ($\frac{3}{2}$ → FÓRMULA)

$x - \frac{7}{2}$: $x \in [2,5] \longrightarrow [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

ENTÃO: $L^{-1}(x) = \frac{3}{2\pi}x + \frac{7}{2}$

ASSIM: $\tilde{f}(x) = f(L^{-1}(x)) = L^{-1}(x) - \frac{7}{2}$

$f(L^{-1}(x)) = \frac{3}{2\pi}x + \frac{7}{2} - \frac{7}{2}$

$$\boxed{\tilde{f}(x) = \frac{3x}{2\pi}}$$

LINEAR, PORÉM NÃO MAIS COM INCLINAÇÃO 1

2° PASSO: ANÁLISE HARMÔNICA

$$\tilde{f}(x) \approx a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos(Kx) + b_K \operatorname{sen}(Kx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx$$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(Kx)\,dx$$

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cdot\operatorname{sen}(Kx)\,dx$$

$\tilde{f}(x)$ É ÍMPAR!

$a_0 = 0$

$a_K = 0$, $\forall K$.

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2\pi}\underbrace{x\cdot\operatorname{sen}(Kx)}_{\text{PAR}}\,dx \Rightarrow$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\operatorname{sen}(Kx)\,dx$$

SUBSTITUIÇÃO: $dv = \operatorname{sen}(Kx)\,dx$, $v = -\frac{1}{K}\cos(Kx)$; $u = x$, $du = dx$

$$= \frac{3}{\pi^2}\left\{-\frac{x}{K}\cos(Kx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{K}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(Kx)\,dx}_{=0}\right\}$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\left\{-\frac{\pi}{K}\cos(K\pi)\right\} =$$

$$= \frac{3}{K\pi}\cos(K\pi) \rightarrow \cos(K\pi) = (-1)^K$$

ENTÃO:

- $K = 1$: $\frac{3}{\pi}$
- $K = 2$: $-\frac{3}{2\pi}$

PARANDO EM $K = 2$:

$$\tilde{f}(x) \approx \underbrace{\frac{3}{\pi}\operatorname{sen}(x)}_{K=1} - \underbrace{\frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2x)}_{K=2 \text{ (ORDEM 2)}}$$

$\Downarrow$

$\tilde{g}$ = DEFINIÇÃO

ENTÃO $\tilde{g} \Longrightarrow g$

$[-\pi, \pi] \xrightarrow{L^{-1}} [2,5]$

ASSIM: $g(x) = \tilde{g}(L(x))$

$$\tilde{g}(L(x)) = \frac{3}{\pi}\operatorname{sen}(L(x)) - \frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2L(x))$$

$$\tilde{g}(L(x)) = \frac{3}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)\right) - \frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{2}\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)$$

$$\approx f(x)$$

OBSERVAÇÃO INTERESSANTE

Scanned by CamScanner

PODERÍAMOS TER FEITO A ANÁLISE HARMÓNICA EM $[2, 5]$ COM AS FUNÇÕES:

$$1, \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x\right)}_{\text{PERÍODO 3}}, \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}x\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right)$$

↑

ORTOGONAIS EM QUALQUER INTERVALO DE TAMANHO 3

EXEMPLO: $a_2 = \underbrace{\frac{1}{\frac{3}{2}}}_{\text{METADE DO INTERVALO}} \int_2^5 f(x) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right) dx$

AULAS 10/05 (1)

MAP 3121 PARA P2

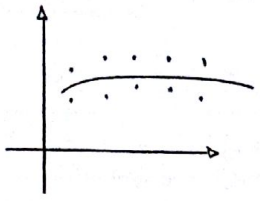
PROFESSOR EDWARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

- INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

↳ VAMOS INICIAR OS ESTUDOS DE INTERPOLAÇÃO OBSERVANDO A DIFERENÇA ENTRE INTERPOLAÇÃO E MMQ.

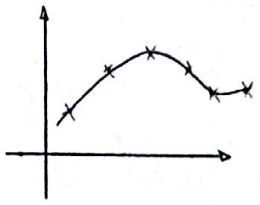
APROXIMAÇÃO X INTERPOLAÇÃO

EX: MMQ



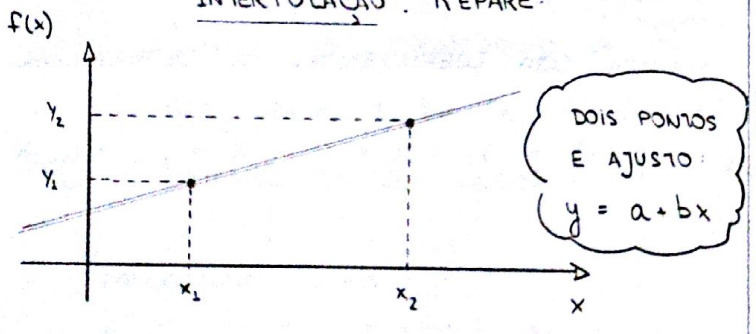
OBJETIVO: ACHAR A FUNÇÃO (DA FAMÍLIA) MAIS PRÓXIMA (QUE MELHOR APROXIMA OS PONTOS)

EX.: POLINOMINAL
EX2: SPLINE CÚBICO



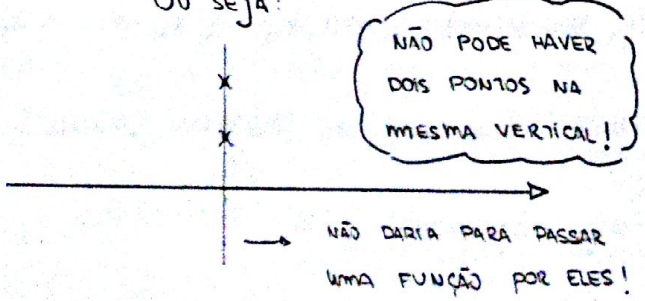
OBJETIVO: ACHAR A FUNÇÃO DA FAMÍLIA QUE "PASSA" PELOS PONTOS

OBSERVAÇÃO: PODE ACONTECER DE, AO PROCURAR UMA APROXIMAÇÃO, ACHARMOS UMA INTERPOLAÇÃO. REPARE:



OBSERVAÇÃO: NO CASO DE INTERPOLAÇÃO, NÃO PODE HAVER DOIS DADOS $(x_i; f(x_i))$ E $(x_j; f(x_j))$, $i \neq j$ com $x_i = x_j$

OU SEJA:



↳ AGORA, VAMOS ESTABELECER UMA NOTAÇÃO APROPRIADA PARA DARMOS INÍCIO AOS NOSSOS ESTUDOS:

NOTAÇÃO: $\mathbb{P}_N$ ESPAÇO VETORIAL DE TODOS OS POLINÔMIOS DE GRAU $\leq N$.

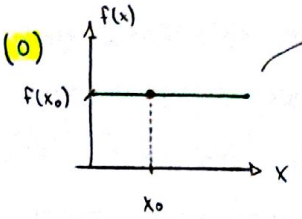
↳ UMA BASE DE $\mathbb{P}_N$

$$\{1, x^1, x^2, \dots, x^N\}$$

NESSA BASE POSSUÍMOS $n+1$ ELEMENTOS, OU SEJA, A DIMENSÃO DE $\mathbb{P}_N$ SERÁ $n+1$.

PEQUENA DIGRESSÃO:

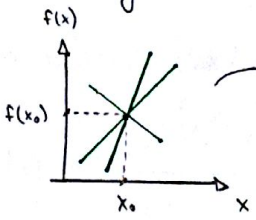
(0)



EXISTE UM POLINÔMIO DE GRAU ZERO (0) QUE INTERPOLA:

$p(x) = f(x_0) \cdot x_0$ (CONSTANTE)

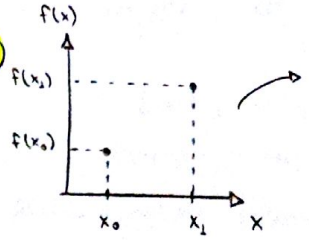
E DE GRAU 1, QUANTOS INTERPOLAM?



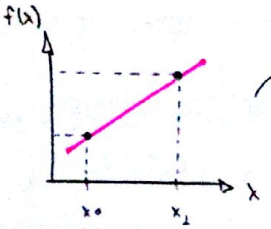
→ INFINITOS!

OU SEJA:
- GRAU 0: APENAS 1
- GRAU 1: INFINITOS

(1)

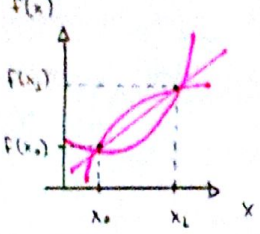


PARA GRAU 0 E DOIS PONTOS EM GERAL NÃO TEMOS NENHUM CASO, A NÃO SER QUE $f(x_0)$ IGUAL A $f(x_1)$.



PARA GRAU 1 TEMOS UM CASO DE INTERPOLAÇÃO

Scanned by CamScanner



→ INFINITOS!

OU SEJA:
- GRAU 0: GERALMENTE NENHUM
- GRAU 1: 1 CASO
- GRAU 2: INFINITOS

(2) PARA 3 PONTOS:

OU SEJA:
- GRAU ≤ 1: EM GERAL, NENHUM
- GRAU 2: 1 CASO
- GRAU 3: INFINITOS

TEOREMA: DADOS $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($m+1$ PONTOS) TODOS DISTINTOS ENTRE SI, E VALORES $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$, EXISTE UM ÚNICO POLINÔMIO p e P_N QUE INTERPOLA ESSES DADOS, ISTO É:

$$p(x_0) = f(x_0)$$
$$p(x_1) = f(x_1)$$
$$\vdots$$
$$p(x_N) = f(x_N)$$

↳ AGORA, VAMOS ALINHAR A NOTAÇÃO UTILIZADA UMA VEZ QUE FOI DADO O TEOREMA:

NOTAÇÃO: $P_f[x_0, x_1, \dots, x_N]$

NOME DO ÚNICO INTERPOLADOR DOS PONTOS $x_0, x_1, \dots, x_N$ COM VALORES DADOS POR f

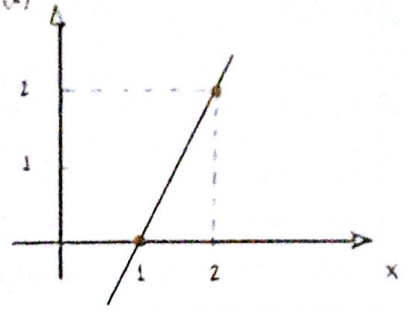
EXPRESSÃO DO POLINÔMIO: $P_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x)$

NOME DO POLINÔMIO — "EM X"

EXEMPLO:

	f
$x_0 = 1$	0
$x_1 = 2$	2

OBSERVAÇÃO: f DEFINIDA POR UMA TABELA OU POR UMA FÓRMULA

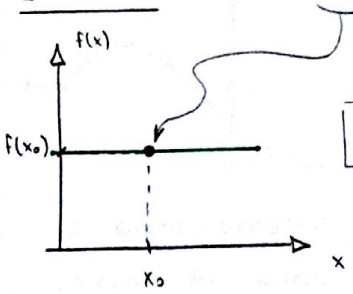


$P_f[1,2](x) = 2(x-1)$

↳ $P_f[1,2]\left(\frac{3}{2}\right) = 1$

↳ $P_f[1,2](1) = 0$

EXEMPLO: PARA UM PONTO ($m = 0$)



$P_f[x_0](x) = f(x_0) \cdot x^0$

↳ PRECISAMOS SABER COMO ENCONTRA UM INTERPOLADOR:

ABORDAGEM INGÊNUA PARA ACHAR UM INTERPOLADOR:

1° PASSO: ESCREVA O POLINÔMIO NA BASE CANÔNICA COM COEFICIENTES A DETERMINAR:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$$

$m+1$ INCÓGNITAS

2° PASSO: ESCREVA AS $m+1$ EQUAÇÕES:

$$p(x_0) = f(x_0): a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_N x_0^N$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$p(x_N) = f(x_N): a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \dots + a_N x_N^N$$

3° PASSO: REALIZAR UM SISTEMA LINEAR

4° PASSO: ENCONTRAR OS RESULTADOS

AULA 5
10/05
③

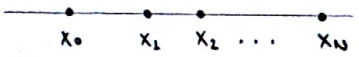
↳ NÃO VAI SER TÃO SIMPLES ASSIM. INFELIZMENTE ESTE MÉTODO NÃO É PRECISO E OS RESULTADOS GERADOS NÃO SÃO CONFIÁVEIS.

PROBLEMAS:
① TRABALHOSO: MUITO TEMPO DESPENDIDO NA COMPUTAÇÃO.
② SUJEITO A ERROS DE ARREDONDAMENTO.

ALTERNATIVAS: 2 MÉTODOS ENCONTRADOS

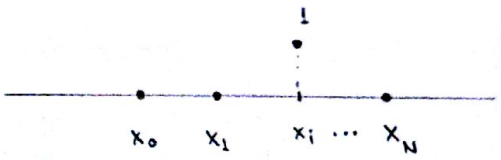
(I) POLINÔMIO DE LAGRANGE
(II) FORMAS DIVIDIDAS (DE NEWTON)

- **POLINÔMIOS DE LAGRANGE**:

DADOS OS PONTOS: 

OBSERVAÇÃO: NÃO É NECESSÁRIO QUE A ORDEM DE INDEXAÇÃO DOS PONTOS REFLITA A ORDEM DOS PONTOS NA RETA

REFLEXÃO: EXISTE UM POLINÔMIO DE P_N QUE VALHA 1 EM x_i E 0 NOS DEMAIS PONTOS DADOS?



RESPOSTA: PELO TEOREMA DADO, SIM! E ESSE POLINÔMIO É ÚNICO! DESSA MANEIRA VAMOS DAR UM NOME PARA ELE:

$$L_i \in P_N \begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_j(x_j) = 0 \end{cases} \Big\rangle j \neq i$$

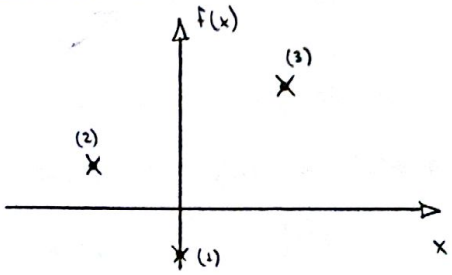
TOME AGORA O SEGUINTE POLINÔMIO:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_N)L_N(x)$$

↳ NÃO DEIXA DE SER UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE P_N.

↳ VAMOS FAZER UM EXEMPLO:

EXEMPLO:



x_i	$f(x_i)$
-1	1
0	-1
1	2

ACHAR A PARÁBOLA QUE PASSE NOS PONTOS ACIMA SABENDO QUE $p \in P_2$

$$p(x) = \underbrace{1}_{f(x_0)} \cdot L_0(x) - \underbrace{1}_{f(x_1)} \cdot L_1(x) + \underbrace{2}_{f(x_2)} \cdot L_2(x)$$

POLINÔMIOS DE LAGRANGE: L_0, L_1, L_2

$$L_0(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(-1-0)\cdot(-1-1)} = \frac{1}{2} \times (x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(0+1)\cdot(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)\cdot(x-0)}{(1+1)\cdot(1-0)} = \frac{1}{2} \times (x+1)$$

DESENVOLVENDO:

$$p(x) = 1\left(\frac{1}{2}x(x-1)\right) - 1(-x^2+1) + 2\left(\frac{1}{2}x(x+1)\right)$$

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + x^2 - 1 + x^2 + x \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$p(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

ENTÃO $L_i(x) = \dfrac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$

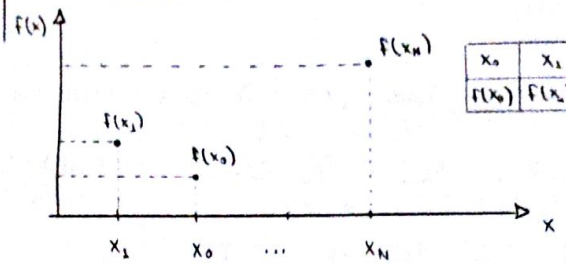
Scanned by CamScanner

AULA 6
12/05
①

MAP3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

- INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL



x_0	x_1	x_N
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_N)$

REPARE: OS PONTOS NÃO PRECISAM ESTAR EM ORDEM

TEORIA: EXISTE ÚNICO POLINÔMIO $p \in \mathbb{P}_N$ QUE INTERPOLE f NOS PONTOS $x_0, x_1, \dots, x_N$

NOMENCLATURA: NOME PARA O POLINÔMIO "p":

$$p_f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA:

(1) SE p É UM POLINÔMIO EM $\mathbb{P}_N$ QUE SE ANULA EM $(n+1)$ PONTOS DISTINTOS ENTÃO p É O POLINÔMIO NULO.

(2) SE p É UM POLINÔMIO EM $\mathbb{P}_N$ QUE SE ANULA NOS m PONTOS DISTINTOS

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$$

ENTÃO: $p(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_N)$

EM QUE $c \in \mathbb{R}$ (PODE ATÉ SER $c=0 \Rightarrow$ E O POLINÔMIO p É NULO)

EXPERIMENTO:

↳ ESSE EXPERIMENTO É RESULTADO DE SÉCULOS DE ESTUDOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS, DESSA MANEIRA NÃO É UM EXPERIMENTO INTUÍTIVO!

$$\underbrace{p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N](x)}_{\in \mathbb{P}_N} - \underbrace{p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x)}_{\in \mathbb{P}_{N-1} \subset \mathbb{P}_N}$$

COMO AMBOS VALEM f NOS PONTOS $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ ENTÃO A SUBTRAÇÃO É UM POLINÔMIO DE $\mathbb{P}_N$ QUE SE ANULA NOS n PONTOS $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$

↳ USANDO A CONSEQUÊNCIA (2)

$$p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N](x) - p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x) = \underbrace{c(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{N-1})}_{\in \mathbb{P}_N}$$

$$= x^N + \text{TERMOS DE GRAU } (N-1)$$

↳ DESENVOLVENDO A CONTA ACIMA:

$$p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N](x) = p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] + \underbrace{c}(x-x_0)\dots(x-x_{N-1})$$

ESSE ELEMENTO TEM QUE ACERTAR A INTERPOLAÇÃO DO x^N

OBSERVAÇÕES:

NO LADO DIREITO, O ÚNICO TERMO DE GRAU N É O $c \cdot x^N$.

OU SEJA, ESSE "c" É O COEFICIENTE DO GRAU N DO INTERPOLADOR $p_f[x_0, x_1, \dots, x_N] \in \mathbb{P}_N$.

NOMENCLATURA: DADA A IMPORTÂNCIA DE "c", VAMOS DAR UM NOME PARA ELE.

$$c = f[x_0, x_1, \dots, x_N]$$

↳ COMO LER? DIFERENÇA DIVIDIDA DE f NOS PONTOS $x_0, x_1, x_2 \dots x_N$.

ENTÃO (*)

$$p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N](x) \ominus$$

↳ INTERPOLA TODOS

$$p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x) \ominus \text{ MENOS O } x_N$$

$$\ominus f[x_0, x_1, \dots, x_N](x-x_0)\dots(x-x_{N-1})$$

↳ VALE ZERO EM TUDO, MENOS x_N

PERGUNTA: Como o AJUSTE DA CONSTANTE PODE SER FEITO?

1° PASSO: LADO ESQUERDO = $f(x_N)$ (TEM QUE INTERPOLAR)

2° PASSO: LADO DIREITO = $p_f[x_0, x_1, \dots x_{N-1}](x_N)$

$\oplus\ f[x_0, x_1, \dots x_N](x_N - x_0)(x_N - x_1)\dots(x_N - x_{N-1})$

3° PASSO: BASTA ISOLAR $f[x_0, x_1, \dots, x_N]$ DESDE QUE SE CONHEÇA $p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$

VAMOS PENSAR DIFERENTE:

PODEMOS APLICAR (*) PARA (n-1) NO TERMO $p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x)$ QUE APARECE EM (*)

$p_f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x) =$ → VAMOS "ABRIR" ESTE TAMBÉM.

$p_f[x_0, x_1, \dots x_{N-2}](x) \oplus$

$\oplus\ f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x - x_0)\dots(x - x_{N-2}) \oplus$

$\oplus\ f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}](x - x_0)\dots(x - x_{N-1})$

$p_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) =$

$p_f[x_0](x) \oplus$

$\oplus\ f[x_0, x_1](x - x_0) \oplus$ (**)

$\oplus\ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \oplus$

$\oplus\ f[x_0, x_1, \dots, x_N](x - x_0)\dots(x - x_{N-1})$

→ INTERPOLADOR DE GRAU ZERO DE f NO PONTO $x_0 := f(x_0)$

MAS $= f(x_0) \cdot x^0$

→ TAMBÉM É O COEFICIENTE DE GRAU MAIS ALTO DE $p_f[x_0]$.

$f[x_0]$

$(**) = \underbrace{f[x_0]}_{f(x_0)} + \underbrace{f[x_0, x_1](x - x_0)}_{\text{AQUELE QUE VAI UNIR OS PONTOS ⓪ E ①}} + \dots$

PERCEBAM:

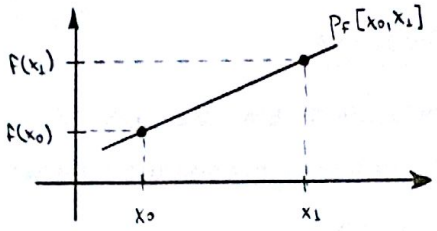
ESCREVEMOS, COM (**), O INTERPOLADOR $p_f[x_0, x_1, \dots x_N] \in \mathcal{P}_N$ COMO COMBINAÇÃO LINEAR DOS ELEMENTOS DA BASE

$$\left\{1,\ x - x_0,\ (x - x_0)(x - x_1),\ \dots,\ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-1})\right\}$$

FICA A QUESTÃO

COMO CALCULAR ESSES COEFICIENTES?

→ VAMOS ACHAR UMA ESPÉCIE DE RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA ENTRE ELES.



→ QUEM É O COEFICIENTE DE GRAU 1?

É A INCLINAÇÃO $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

OBSERVAÇÃO: EXISTE UM $f[x_1, x_2]$: COEFICIENTE DE GRAU 1 DO INTERPOLADOR $p_f[x_1, x_2] \in \mathcal{P}_1$ E $f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$

→ $f[\alpha] = f(\alpha) \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$f[\alpha, \beta] = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \forall\ \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$$

→ TANTO $p_f[\dots]$ QUANTO $f[\dots]$ INDEPENDEM DA ORDEM DE LISTAR OS PONTOS.

Scanned by CamScanner

12/05
③

↳ ACABAMOS DE VER OS CASOS PARA DETERMINAR DOIS PONTOS, VAMOS VER PARA CASOS DE TRÊS PONTOS:

$f[x_0, x_1, x_2]$:

I) $p_f[x_0, x_1, x_2](x) - p[x_0, x_1](x) = f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

II) $p_f[x_0, x_1, x_2](x) - p[x_1, x_2](x) = f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_2)$

SUBSTRAÇÃO: (I) - (II)

$p_f[x_1, x_2](x) - p_f[x_0, x_1](x) =$

$= f[x_0, x_1, x_2](x)\left((x - x_0)(x - x_1) - (x - x_1)(x - x_2)\right)$

$f[x_0, x_1, x_2](x)\left((x - x_1)(\cancel{x} - x_0 - \cancel{x} + x_2)\right)$

$\left(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]\right)\cancel{(x - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]\cancel{(x - x_1)}(x_2 - x_0)$

ENTÃO: $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

FÓRMULA GERAL:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}, x_N] = \frac{f[x_1, \cdots, x_N] - f[x_0, \cdots, x_{N-1}]}{x_N - x_0}$$

AULA 7
17/05
①

MAP 3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMÍLIO

- DIFERENÇAS DIVIDIDAS:

$P_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) \equiv$

INTERPOLADOR DE $m+1$ PONTOS EM $\mathcal{P}_N$

ESSES POLINÔMIOS FORMAM BASE DO $\mathcal{P}_N$

$\equiv f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots +$

$f[x_0, x_1, \dots, x_N](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_N)$

↳ DESSA MANEIRA, PODEMOS ACRESCENTAR QUALQUER NOVO PONTO SEM PERDER A INFORMAÇÃO ANTERIOR.

ACRÉSCIMO DE UM PONTO: $P_f[x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}](x) \equiv$

$\equiv P_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) + f[x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}](x - x_0)\dots(x - x_N)$

RELAÇÃO ENTRE DIFERENÇAS DIVIDIDAS:

$$f[w_1, w_2, \dots, w_K] = \frac{f[w_2, w_3, \dots, w_K] - f[w_1, w_2, \dots, w_{K-1}]}{w_K - w_1}$$

TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS:

x_0 $f(x_0)$

$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

x_1 $f(x_1)$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

x_2 $f(x_2)$

$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$

$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

x_3 $f(x_3)$

EXEMPLO DA AULA RETRASADA (AULA 4)

x_i	$f(x_i)$
-1	1
0	-1
1	2

→ ANTERIORMENTE ESSE EXEMPLO TINHA SIDO FEITO PELO MÉTODO DE LAGRANGE

① TABELA

x_i	$f(x_i)$		
-1	1		
		$\frac{(-1) - 1}{0 - (-1)} = -2$	
0	-1		$\frac{3 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}$
		$\frac{2 - (-1)}{1 - 0} = 3$	
1	2		

② ENTÃO O POLINÔMIO QUE PASSARÁ PELOS PONTOS x_i E $f(x_i)$ DADOS É:

$P_f[x_0, x_1, x_2](x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

$P_f[x_0, x_1, x_2](x) = 1 + (-2)(x - (-1)) + \frac{5}{2}(x - (-1))(x - 0) \Rightarrow$

$P_f[x_0, x_1, x_2](x) = 1 - 2x - 2 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x \Rightarrow$

$$P_f[x_0, x_1, x_2](x) = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}x^2$$

③ AGORA, VOU ACRESCENTAR UM NOVO PONTO

x_i	$f(x_i)$
x_3	2 | 0

↳ PARA ESSE NOVO INTERPOLADOR

$P_f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}x^2 + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x+1)\cdot(x)(x-1)$

↳ FALTA ENCONTRAR: $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

④ NOVA TABELA

x_i	$f(x_i)$			
-1	1			
		-2		
0	-1		$\frac{5}{2}$	
		3		$-\frac{5}{3}$
1	2		$-\frac{5}{2}$	
		-2		
2	0			

Scanned by CamScanner

O NOVO POLINÔMIO QUE SATISFAÇA AS COORDENADAS DO NOVO PONTO:

$$p_f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{3}x(x^2-1)$$

OBSERVAÇÃO PODEMOS ENCONTRAR O MESMO POLINÔMIO ATRAVÉS DE OUTRO CAMINHO DA TABELA:

x_i	$f(x_i)$			
-1	1			
		-2		
0	-1		$\frac{5}{2}$	
		3		$-\frac{5}{3}$
1	2		$-\frac{5}{2}$	
		-2		
2	0			

ENTÃO: $p_f[x_0, x_1, x_2, x_3](x) = p_f[x_1, x_2, x_3, x_0](x) \equiv$

$\equiv f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x-x_1)(x-x_2)$

$+ \underbrace{f[x_1, x_2, x_3, x_0]}_{\Downarrow}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \equiv$

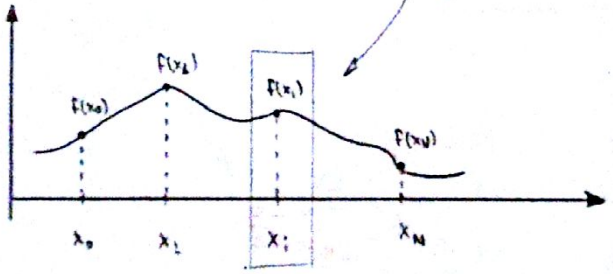
$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$\equiv -1 + 3(x-0) + \left(-\frac{5}{2}\right)(x-0)(x-1) - \frac{5}{3}(x-0)(x-1)(x-2)$$

OBSERVAÇÃO #1 "UM TRUQUE A SER USADO"

$$p_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x_i) = f(x_i)$$

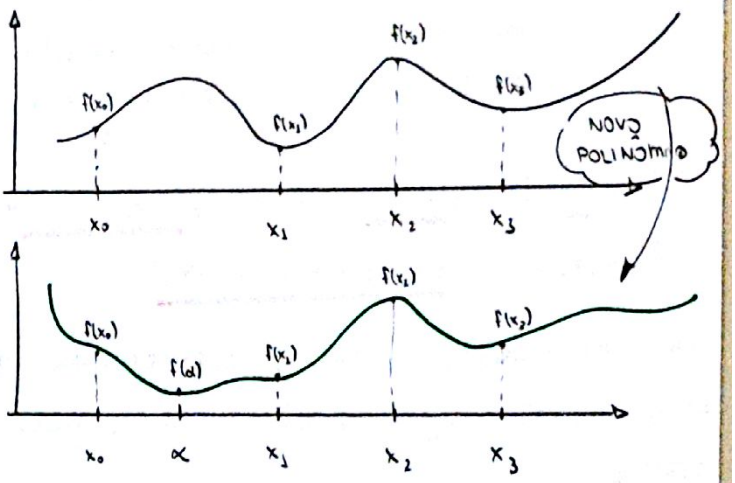
$\hookrightarrow i = 0, 1, \dots, N$



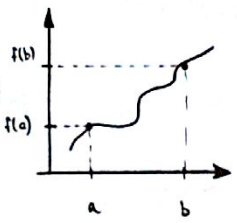
ENTÃO SE A GENTE ACRESCENTAR UM NOVO PONTO DEVEREMOS ARRUMAR A INTERPOLAÇÃO

$$f(x) = p_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) \equiv$$

$$\equiv p_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) + f[x_0, x_1 \dots x_N](x-x_0)\dots(x-x_N)$$



- RELEITURA DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO:



EXISTE UM $\xi \in [a,b]$ TAL QUE:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f[a,b]$$

PORTANTO: $\boxed{f'(\xi) = f[a,b]}$ → f[a,b] É A DERIVADA EM ALGUM PONTO

- GENERALIZAÇÃO DO T.V.M.:

$$f(x) - p_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) \qquad f^{(N)}(x) - N!\, f[x_0, x_1, \dots x_N]$$

DERIVE N VEZES

LEMBRANDO QUE $f[x_0, x_1, \dots, x_N]$ É O COEFICIENTE DE x^N DO POLINÔMIO $p_f[x_0, x_1, \dots, x_N]$

Scanned by CamScanner

AULA 7
17/05
③

A DIFERENÇA ENTRE $f(x) - p_n[x_0, x_1, \dots x_N](x)$
SE ANULA EM $x_0, x_1, \dots, x_N$ (N+1 PONTOS)

ENTÃO:

(I) A DERIVADA SE ANULA EM PELO MENOS (N) PONTOS;

(II) A SEGUNDA DERIVADA SE ANULA EM PELO MENOS (N+1) PONTOS;

⋮

(N) A ENÉSIMA-DERIVADA SE ANULA EM PELO MENOS $N - (N-1) = 1$ PONTOS;

PORTANTO: EXISTE UM PONTO ξ TAL QUE

$$f^{(N)}(\xi) - N! \, f[x_0, x_1, \dots, x_N] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{f[x_0, x_1, \dots, x_N] = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}}$$

→ PARA ALGUM ξ ENTRE O MENOR E O MAIOR PONTO.

AULA 8
19/05
①

MAP3121

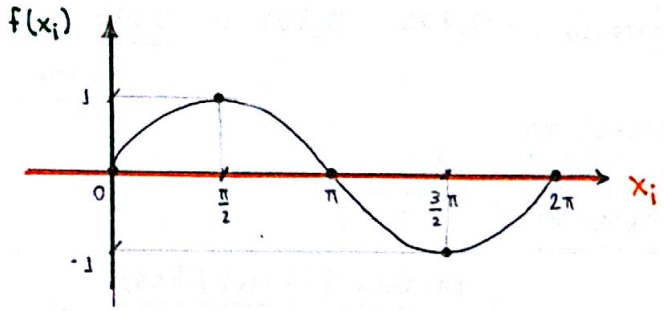
PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

- INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL, SPLINERS CÚBICOS, INTEGRAÇÃO NUMÉRICA ...

EXEMPLO PARA AQUECER O DIA:

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $[0, 2\pi]$ ache

$P_f\left[0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$



1° PASSO: VAMOS ESCREVER A TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS:

x_i	$f(x_i)$				
0	$\widehat{0}$	$f[0]$			
		$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \widehat{\frac{2}{\pi}}$	$f[0,\frac{\pi}{2}]$		
$\frac{\pi}{2}$	1		$\frac{-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}}{\pi-0} = \widehat{\frac{-4}{\pi^2}}$	$f[0,\frac{\pi}{2},\pi]$	
		$\frac{0-1}{\pi-\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{\pi}$		$\frac{0-\left(\frac{-4}{\pi^2}\right)}{\frac{3\pi}{2}-0} = \widehat{\frac{8}{3\pi^3}}$	$f[0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}]$
π	0		$\frac{-\frac{2}{\pi}-\left(\frac{-2}{\pi}\right)}{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = 0$		$\frac{\frac{8}{3\pi^3}-\frac{8}{3\pi^3}}{2\pi-0} = \widehat{0}$
		$\frac{-1-0}{\frac{3\pi}{2}-\pi} = \frac{-2}{\pi}$		$\frac{\frac{4}{\pi^2}-0}{2\pi-\frac{\pi}{2}} = \widehat{\frac{8}{3\pi^3}}$	$f[0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$\frac{3\pi}{2}$	-1		$\frac{\frac{2}{\pi}-\left(\frac{-2}{\pi}\right)}{2\pi-\pi} = \frac{4}{\pi^2}$		
		$\frac{0-(-1)}{2\pi-\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$			
2π	0				

2° PASSO: ENCONTRAR O POLINÔMIO:

$P_f\left[0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right](x) =$

$= \widehat{0} + \widehat{\frac{2}{\pi}}(x-0) + \left(\widehat{\frac{-4}{\pi^2}}\right)(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) + \widehat{\frac{8}{3\pi^3}}(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)$

$+ \widehat{0}\cdot(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow$

OBSERVE QUE O GRAU EXATO É 3

$$P(x) = \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\pi^3}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$$

- RECORDAR É VIVER AULA PASSADA

TVM GENERALIZADA $x_0, x_1, \dots, x_N$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_N] = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}$$

↳ PARA ALGUM ξ NO INTERVALO ENTRE O MAIOR E O MENOR DOS PONTOS DO INTERVALO

EM PARTICULAR

$$\left|f[x_0, x_1, \dots, x_N]\right| = \left|\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\right| \leq \left|\frac{\max_{x\in I} f^{(N)}(x)}{N!}\right|$$

PORTANTO, SE CONSEGUIRMOS LIMITAR:

$|f^{(N)}(x)| \leq M$ PARA $x \in I$

↳ MÁXIMO QUE A FUNÇÃO ASSUME!

ENTÃO

$$|f[x_0, x_1, \dots, x_N]| \leq \frac{M}{N!}$$

- CONTINUE RECORDANDO:

$f(x) = P_f[x_0, x_1 \dots x_N, x](x) \Rightarrow$

$f(x) = P_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x) + f[x_0, x_1, \dots, x_N, x] \odot$

$\odot (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N)$

PORTANTO:

$$\left|f(x) - P_f[x_0, x_1, \dots, x_N](x)\right| = \left|f[x_0, x_1, \dots x_N, x]\right| \cdot \left|(x-x_0)\dots(x-x_N)\right|$$

DIFERENÇA ENTRE f E O INTERPOLADOR NO PONTO x

PORÉM, "x" PODE ESTAR FORA DE I

↳ $\hat{I}$ INTERVALO QUE CONTÉM $x_0, x_1 - x_N, x$

Scanned by CamScanner

$$|f[x_0, x_1 \dots x_N, x]| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(N+1)}(x)|}{(N+1)!} \to \leq \hat{M}$$

LOGO:

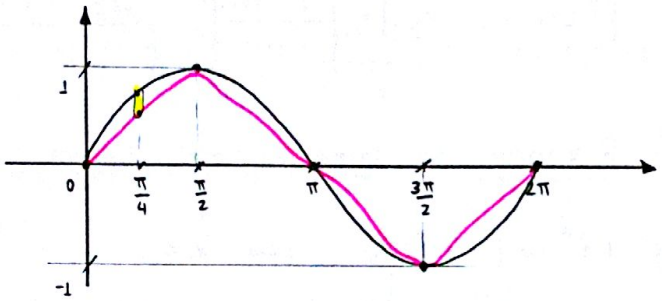
$$\boxed{f(x) - p_f[x_0, x_1 \dots x_N](x) \leq \frac{\hat{M}}{(N+1)!} |(x-x_0)\dots(x-x_N)|}$$

NO EXEMPLO:

como $m = 4$ ENTÃO PRECISAMOS ESTIMAR $|f^{(5)}(x)|$ ($m+1$)

como $f(x) = \operatorname{sen} x$ ENTÃO $f^{(5)}(x) = \cos x$, ASSIM

$|f^{(5)}(x)| \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$



ENTÃO: $|\operatorname{sen}(x) - p(x)| \leq \frac{1}{5!} |(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})(x-2\pi)|$

$p(x)$: INTERPOLAR

OBSERVAÇÃO: Como ESTIMATIVA DE $|f^{(5)}(x)|$ VALE PARA $x \in \mathbb{R}$, ESSA ESTIMATIVA VALE PARA $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

PERGUNTA: ESTIMAR A DIFERENÇA EM $x = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{120} \left| \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) \right|$$

$$= \frac{1}{120} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} \frac{3\pi}{4} \frac{5\pi}{4} \frac{7\pi}{4} = \frac{105}{120} \frac{\pi^5}{4^5} \cong \boxed{0{,}26}$$

OBSERVAÇÃO: 0,26 É A ESTIMATIVA OBTIDA SEM "SABER" O INTERPOLADOR

DIFERENÇA EXATA:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \underline{0{,}707}$
- $p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{3\pi^2}\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{1}\right) \Rightarrow$

$$p\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \underline{0{,}875}$$

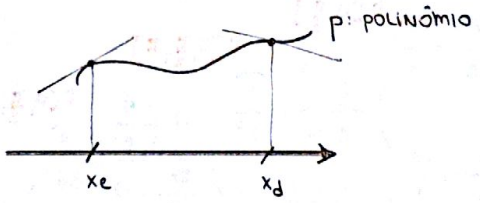
diferença: $0{,}875 - 0{,}707 \approx \boxed{0{,}17}$

- PROBLEMA:

CONTEXTO: $x_e < x_d$

VALORES: $f(x_e)$, $f(x_d)$; $f'(x_e)$, $f'(x_d)$

OBRIGATORIEDADE: EU QUERO UM POLINÔMIO COM ESSES MESMOS VALORES E DERIVADAS, NESSES PONTOS



DEVEMOS PROCURAR EM QUE P_N?

↳ COMO TEMOS 4 INFORMAÇÃO ($f(x)$ e $f'(x)$) VAMOS UTILIZAR P_3 QUE NOS DÁ 4 COEFICIENTES

TRUQUES

I) x_0 $f(x_0)$ / $x_0 + h$ $f(x_0+h)$ $\Rightarrow f[x_0; x_0+h] = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h - x_0)}$

II) x_0 $f(x_0)$ / x_0 $f(x_0)$ $\Rightarrow$ NO LIMITE: $f'(x_0)$

Scanned by CamScanner

AULA 13/05 ③

RESOLVE O PROBLEMA

x	$f(x)$			
x_e	$f(x_e)$			
		$f'(x_e)$		
x_e	$f(x_e)$		$\frac{f[x_e,x_d]-f'(x_e)}{x_d-x_e}$	
		$f[x_e,x_d]$		$\frac{f'(x_d)-f'(x_e)-2f[x_e,x_d]}{(x_d-x_e)^2}$
x_d	$f(x_d)$		$\frac{f'(x_d)-f[x_e,x_d]}{x_d-x_e}$	
		$f'(x_d)$		
x_d	$f(x_d)$			

POLINOMIO:

$$p(x) = f(x_e) + f'(x_e)(x-x_e) + \frac{f[x_e,x_d]-f'(x_e)}{x_d-x_e}(x-x_e)(x-x_e) \quad \oplus$$

$$\ominus \quad \frac{f'(x_e)+f'(x_d)-2f[x_e-x_d]}{(x_d-x_e)^2}$$

EXEMPLO: CONTEXTO $f[0,\pi]=0$

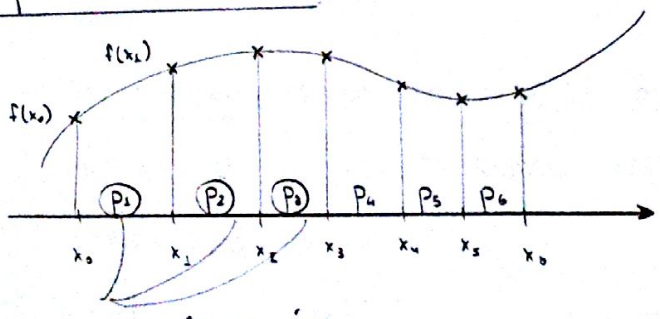
	$x_e = 0$	$x_d = \pi$
	$f(0) = 0$	$f(\pi) = 0$
	$f'(0) = 1$	$f'(\pi) = -1$

$$p(x) = 0 + 1.(x-0) + \frac{0-1}{\pi}(x-0)^2 + \frac{1+(-1)-2.0}{\pi^2}(x-0)^2(x-\pi)$$

$$p(x) = x - \frac{1}{\pi}x^2 \Rightarrow \boxed{p(x) = \frac{x}{\pi}(\pi - x)}$$

↳ GRAU 2

- O QUE SPINE CÚBICO?



um polinômio cúbico diferente em cada intervalo

↳ o que precisamos determinar: 6×4 (polinômio cúbico)

↳ imposição

I) 1ª DERIVADA $p_1'(x_1) = p_2'(x_1) = \ldots$

↳ 5 imposições

II) 2ª DERIVADA $p_1''(x_1) = p_2''(x_1) = \ldots$

↳ 5 imposições

III) $p_1(x_1) = f(x_0)$, $p_1(x_1) = f(x_1)$ ...

↳ 12 imposições

$24 - 22 = 2$

↳ FIXAR DERIVADA NAS PONTAS

↳ FAZER 2ª DERIVADA IGUAL A ZERO NAS PONTAS

Scanned by CamScanner

AULA 9
24/05
①

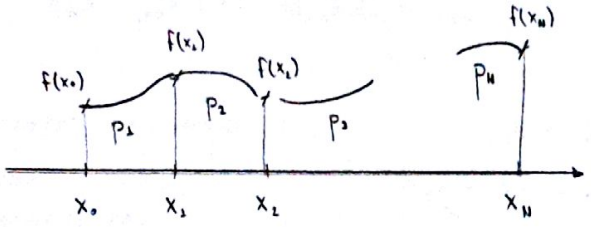
MAP3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

- SPLINE CÚBICO: SEGUINDO AS NOTAS

DADOS: $x_0\ x_1\ x_2 \dots x_N$ (EM ORDEM)

$f(x_0)\ f(x_1)\ f(x_2) \dots f(x_N)$



OBJETIVO: INTERPOLAR COM FUNÇÃO $S(x)$ QUE SEJA CONTÍNUA ATÉ A SEGUNDA DERIVADA E QUE SEJA UM POLINÔMIO CÚBICO EM CADA INTERVALO $[x_{i-1}; x_i]$

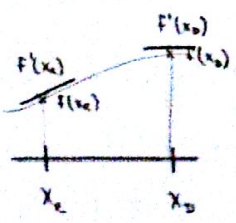
- $I_i = [x_{i-1}; x_i]$
- p_i = POLINÔMIO CÚBICO QUE É A RESTRIÇÃO DE S A I_i

PROBLEMA: ACHAR $S(x)$

MÉTODO: ① TOMAR COMO INCÓGNITA AS DERIVADAS DE S NOS NÓS:

- $d_0 = S'(x_0)$
- $d_1 = S'(x_1)$
- $\vdots$
- $d_N = S'(x_N)$

OBSERVAÇÃO: TENDO, EM CADA I_i, OS VALORES DE p_i NOS EXTREMOS ASSIM COMO SUAS DERIVADAS



$x_e\ f(x_e)\ f'(x_e)$

$x_e\ f(x_e)$

$x_d\ f(x_d)\ f'(x_d)$

$x_d\ f(x_d)$

... ETC

A EXPRESSÃO DE p_i FICA DETERMINADO

② REPARE QUE NA FÓRMULA DE $p_i(x)$ VAI ENTRAR $\underbrace{f(x_{i-1})}_{d_{i-1}}$ E $\underbrace{f(x_i)}_{d_i}$ ⇒ AINDA SÃO INCÓGNITAS

OBSERVE QUE EM CADA NÓ x_i $i = 1, 2, \dots n-1$ (NÓS INTERNOS)

↳ S É CONTÍNUA: $p_i(x_i) = f(x_i)$

$p_{i+1}(x_i) = f(x_i)$

VALORES SÃO IGUAIS A DIREITA E A ESQUERDA

↳ S' É CONTÍNUA: $S'(x_i) = p_i'(x_i) = d_i$

$S'(x_i) = p_{i+1}'(x_i) = d_i$

↳ S'' É CONTÍNUA: ③ IMPOSTO: $\boxed{p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)}$

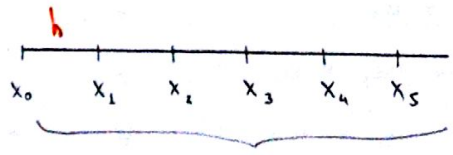
↳ NOS NÓS INTERNOS

MANIPULANDO ALGEBRICAMENTE $p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$ NÓ i:

$$\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h} d_{i-1} + 2\underbrace{(x_{i+1} - x_{i-1})}_{2h} d_i + \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h} d_{i+1} =$$

$$= 3\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h} f[x_{i-1}, x_i] + 3\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h} f[x_i, x_{i+1}]$$

SUPONHA: $m = 5$ & $x_i - x_{i-1} = h$



NÓS INTERNOS

↳ VAMOS TER $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ COMO 6 INCÓGNITAS $(m+1)$

Scanned by CamScanner

LINHA ZERO

$$d_0 + 4d_1 + d_2 = 3f[x_0,x_1] + 3f[x_1,x_2]$$
$$d_1 + 4d_2 + d_3 = 3f[x_1,x_2] + 3f[x_2,x_3]$$
$$d_2 + 4d_3 + d_4 = 3f[x_2,x_3] + 3f[x_3,x_4]$$
$$d_3 + 4d_4 + d_5 = 3f[x_3,x_4] + 3f[x_4,x_5]$$

LINHA CINCO

↳ TEMOS A LIBERDADE PARA MAIS DUAS EQUAÇÕES, PARA ISSO USAREMOS DOIS TIPOS DE SPLINE:

- (I) SPLINE GRAMPEADO
- (II) SPLINE NATURAL

(I) SPLINE GRAMPEADO (CLAMPED)

↳ VAMOS FIXAR d_0 E d_N, ISTO É:

$$\begin{cases} d_0 = A & \text{(LINHA ZERO)} \\ d_5 = B & \text{(LINHA CINCO)} \end{cases}$$

- PODEMOS TRATAR DE DOIS JEITOS:

A) COLOCAR COMO AS DUAS EQUAÇÕES RESTANTES

B) SUBSTITUIR $d_0 = A$ E $d_5 = B$ E FICAR COM 4 EQUAÇÕES NAS INCÓGNITAS d_1, d_2, d_3, d_4

$$4d_1 + d_2 = \ldots - A$$
$$d_1 + 4d_2 + d_3 = \ldots$$
$$d_2 + 4d_3 + d_4 = \ldots$$
$$d_3 + 4d_4 = \ldots - B$$

↳

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdots$$

PODEMOS USAR JACOBI OU GAUSS SNEIDEL

(II) SPLINE NATURAL

$$S''(x_0) = S''(x_N) = 0$$

DUAS EQUAÇÕES $\begin{cases} p_1''(x_0) = 0 & \text{(LINHA ZERO)} \\ p_5''(x_5) = 0 & \text{(LINHA CINCO)} \end{cases}$

↳

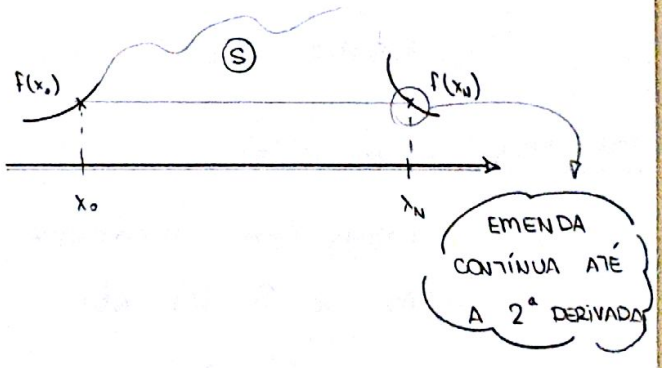
$$\begin{cases} 2d_0 + d_1 = 3f[x_0,x_1] \\ d_{N-1} + 2d_N = 3f[x_{N+1},x_N] \end{cases}$$

$$2d_0 + d_1$$
$$d_0 + 4d_1 + d_2$$
$$d_1 + 4d_2 + d_3$$
$$d_2 + 4d_3 + d_4$$
$$d_3 + 4d_4 + d_5$$
$$d_4 + 2d_5$$

DIAGONAL DOMINANTE (SATISFAZ O CRITÉRIO DAS LINHAS)

(III) SPLINE PERIÓDICO

⟹ CRITÉRIO DE EXISTÊNCIA: $f(x_N) = f(x_0)$



- CONTINUIDADE DE S EM x_N: $f(x_N) = f(x_0)$
- CONTINUIDADE DE S' EM x_N: $d_N = d_0$ (ISSO ELIMINA d_N COMO INCÓGNITA)
- CONTINUIDADE DE S'' EM x_N: $p_1''(x_0) = p_N''(x_N)$ ⇓ EXPLICITADO NO TEXTO

COM ESPAÇAMENTO h:

$$4d_0 + d_1 + d_{N-1} = 3f[x_0,x_1] + 3f[x_{N-1},x_N]$$

Scanned by CamScanner

AULA 9
24/06
③

NO MEU CASO:

$$4d_0 + d_1 + d_4 = \dots$$
$$d_0 + 4d_1 + d_2 = \dots$$
$$d_1 + 4d_2 + d_3 = \dots$$
$$d_2 + 4d_3 + d_4 = \dots$$
$$d_0 + d_3 + 4d_4 = \dots$$

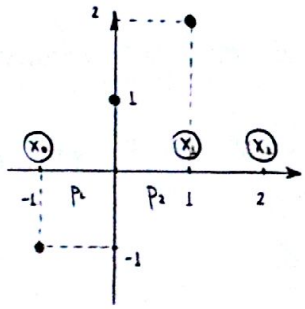
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & \end{array}\right)$$

EXEMPLO DE TEXTO: $f(x) = \operatorname{sen} x$

① GRAMPEADO
② NATURAL
③ PERIÓDICO

EXERCÍCIO:

(SPLINE NATURAL)



ROTEIRO

- ESCREVA P_1 E P_2 EM FUNÇÃO DOS DADOS E DAS INCÓGNITAS d_0, d_1, d_2
- ESCREVA AS EQUAÇÕES:

  $P_1''(-1) = 0$ (SPLINE NATURAL)

  $P_1''(0) = P_2''(0)$ (NÓ INTERNO)

  $P_2''(1) = 0$ (SPLINE NATURAL)

- EXPLICITE AS EQUAÇÕES
- ACHE d_0, d_1, d_2
- ESCREVA AS FÓRMULAS FINAIS DE P_1 E P_2 COM ESSES VALORES

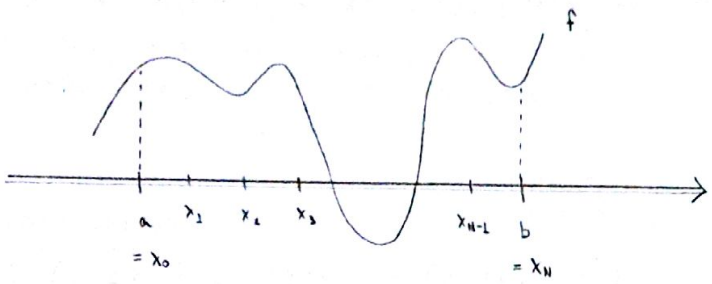
Scanned by CamScanner

AULA 10
31/05
①

MAP 3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR: GEORGE EMILIANO

- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA



VAMOS ENCONTRAR O VALOR NUMÉRICO DE $\int_a^b f$

1° PASSO: PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

↳ PODE SER IRREGULAR, ISTO É, DISTÂNCIA ENTRE x_j E x_{j+1} PODER SER DESIGUAL

2° PASSO: CRIAÇÃO DE CÉLULAS:

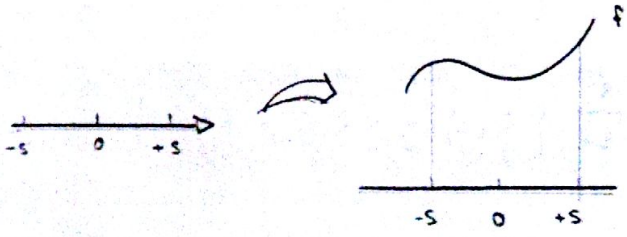
CÉLULAS: $[x_{i-1} ; x_i] = I_i$
(REPETIÇÕES)

↳ VAMOS NOS CONCENTRAR EM UMA CÉLULA

h = TAMANHO DE $I_i = x_i - x_{i-1}$

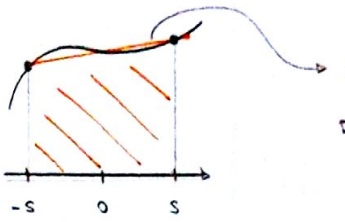
$s = \frac{h}{2}$

3° PASSO: MUDANDO AS COORDENADAS, COLOCAMOS A ORIGEM NO CENTRO DA CÉLULA



↳ VAMOS ESTUDAR MANEIRAS DE ESTIMAR $\int_{-s}^{s} f$

- MÉTODO DOS TRAPÉZIOS



↳ $P_f[-s;s]$ INTERPOLADOR DE GRAU 1 DOS PONTOS $-s$ A s.

$$\int_{-s}^{s} f(x) \approx \int_{-s}^{s} P_f[-s;s]$$

SABEMOS QUE: $P_f[-s,s] = f(-s) + f[-s,s](x+s)$

$$P_f[-s,s] = f(-s) + s\,f[-s,s] + x\,f[-s,s]$$

(ÍMPAR)

ENTÃO:

$$\int_{-s}^{s} P_f[-s,s] = (2s)\cdot\left(f(-s) + s\,f[-s;s]\right) \Rightarrow$$

$$\int_{-s}^{s} P_f[-s,s] = (2s)\cdot\left(f(-s) + s\left(\frac{f(s) - f(-s)}{2s}\right)\right)$$

$$\boxed{\int_{-s}^{s} P_f[-s,s] = (2s)\left(\frac{f(s) + f(-s)}{2}\right)}$$

↳ SE $f(s)$ E $f(-s)$ SÃO POSITIVOS = ÁREA DO TRAPÉZIO

- QUAL É O ERRO COMETIDO NA APROXIMAÇÃO?

FÓRMULA DE ERRO DE INTERPOLAÇÃO (PARA DOIS PONTOS):

$$\boxed{\left|f(x) - P_f[-s,s](x)\right| \leq \frac{M_f(2)}{2!}\left|(x-s)(x+s)\right|}$$

↳ VALE PARA $\forall x$ EM $[-s, s]$

↳ $M_f(2) \geq \max_{[-s,s]} f^N$

DESENVOLVENDO

Scanned by CamScanner

$$\left| \int_{-s}^{s} f(x)dx - \int_{-s}^{s} p_f[s,-s](x)dx \right| =$$

$$\left| \int_{-s}^{s} \left(f(x) - p_f[s,-s](x) \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-s}^{s} \left| f(x) - p_f[s,-s](x) \right| dx$$

$$\leq \frac{M_f(2)}{2} \int_{-s}^{s} \underbrace{|(x-s)(x+s)|}_{|(x^2-s^2)| = s^2-x^2 \ (>0)} dx =$$

NESSE INTERVALO

$$= \frac{M_f(2)}{2} \cdot 2 \int_0^s (s^2 - x^2)\,dx = M_f(2) \left\{ s^3 - \frac{s^3}{3} \right\}$$

$$\boxed{= \frac{2\,M_f(2)}{3} s^3}$$

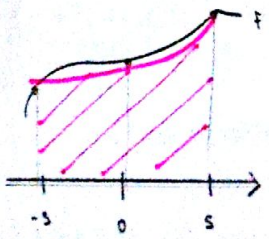
ENTÃO: ESTIMATIVA DE ERRO PARA 1 CÉLULA DE TRAPÉZIO:

$$\boxed{\frac{2\,M_f(2)}{3} s^3} \quad \text{OU} \quad \boxed{\frac{M_f(2)}{12} h^3}$$

↳ MAIS COMUM ASSIM

- MÉTODO DE SIMPSON

↳ IDEIA: AUMENTAR A ORDEM DO INTERPOLADOR



$p_f[-s,0,s] \in \mathbb{P}_2$

$$\int_{-s}^{s} f \approx \int_{-s}^{s} p_f[-s,0,s]$$

FÓRMULA PARA $\int_{-s}^{s} p_f[-s,0,s]$

$$p_f[-s,0,s](x) = p_f[0,+s,-s](x) =$$

$$= f(0) + f[0,s]x + f[0,s,-s]x(x-s) =$$

$$= \underbrace{\left(f(0) + f[0,s,-s]x^2\right)}_{\text{PARTE PAR}} + \underbrace{\left(f[0,s]x - s\,f[0,s,-s]x\right)}_{\text{PARTE ÍMPAR}}$$

PORTANTO:

$$\int_{-s}^{s} p_f[0,+s,-s](x) = (2s)f(0) + \underbrace{f[0,s,-s]}_{\text{CÁLCULO DE } f[0,s,-s]:} \cdot \frac{2s^3}{3}$$

0	$f(0)$			
		$\frac{f(s)-f(0)}{s}$		$\frac{\frac{f(-s)-f(s)}{-2s} - \frac{f(s)-f(0)}{s}}{-s}$
s	$f(s)$			
		$\frac{f(-s)-f(s)}{-2s}$		
$-s$	$f(-s)$			

$$= \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{f(-s)-f(s)}{2} + \frac{2f(s)-2f(0)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2s^2} \left\{ f(-s) + f(s) - 2f(0) \right\}$$

$$\int_{-s}^{s} p_f[0,+s,-s](x) =$$

$$(2s)f(0) + \frac{2s^3}{3}\frac{1}{s^2}\left\{ f(-s) + f(s) - 2f(0) \right\} =$$

$$s\left\{ 2f(0) + \frac{f(-s)}{3} + \frac{f(s)}{3} - \frac{2f(0)}{3} \right\} =$$

$$\frac{s}{3}\left\{ f(-s) + 4f(0) + f(s) \right\} =$$

$$(2s) \cdot \left(\frac{f(-s) + 4f(0) + f(s)}{6} \right)$$

FÓRMULA DE SIMPSON PARA 1 CÉLULA

Scanned by CamScanner

AULA 10
31/05
(3)

ESTIMATIVA DO ERRO DE SIMPSON:

↳ ERRO DE INTERPOLAÇÃO PARA 3 PONTOS

$$\left| f(x) - P_f[-s,0,s](x) \right| \leq \frac{M_f(3)}{3!} \left| (x+s) \times (x-s) \right|$$

↳ $M_f(3) \geq \max f'''$

DESENVOLVENDO:

$$\left| \int_{-s}^{s} f(x)dx - \int_{-s}^{s} P_f[-s,0,s](x)\,dx \right| \leq$$

$$\frac{M_f(3)}{3!} \int_{-s}^{s} \underbrace{\left| (x+s) \times (x-s) \right|}\, dx =$$

$$|x(x^2 - s^2)| =$$

$$= \underbrace{|x|(s^2 - x^2)}, \quad p/\ x \in [-s;s]$$

É PAR!

$$= \frac{M_f(3)}{6} \cdot 2 \int_{0}^{s} x(s^2 - x^2)\,dx =$$

(ERA MÓDULO PARA O INTERVALO)

$$= \frac{M_f(3)}{3} \left\{ s^2 \cdot \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} \right\} = \frac{M_f(3)}{3} \cdot \frac{s^4}{4}$$

$$= \boxed{\frac{M_f(3)}{12} s^4} \quad \text{OU} \quad \boxed{\frac{M_f(3)}{192} h^4}$$

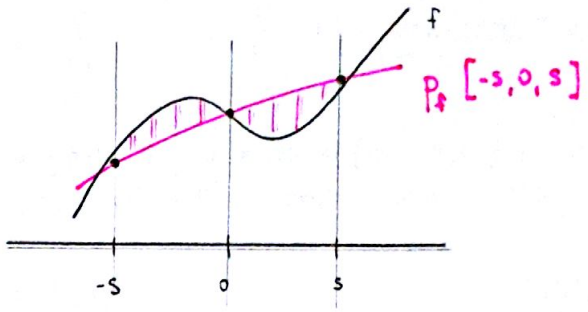
→ COMO TUDO NA VIDA, PODEMOS MELHORAR DE h^4 PARA h^5

AFIRMAÇÃO: "SIMPSON É EXATO PARA POLINÔMIOS CÚBICOS."

OU SEJA, SE $f(x)$ FOR UM POLINÔMIO CÚBICO ENTÃO

$$\int_{-s}^{s} f = \int_{-s}^{s} P_f[-s,0,s]$$

INTUIÇÃO



PROVA:

$$\int_{-s}^{s} f(x)\,dx - \int_{-s}^{s} P_f[-s,0,s](x)\,dx =$$

$$\int_{-s}^{s} \underbrace{f(x) - P_f[-s,0,s](x)}\, dx$$

- É POLINÔMIO DE P_3
- É ZERO EM $-s, 0, s$

ENTÃO: $f(x) - P_f[-s,0,s](x) = c(x+s)x(x-s)$

$$f(x) - P_f[-s,0,s](x) = \underbrace{\underbrace{cx}_{\text{ÍMPAR}}\underbrace{(x^2 - s^2)}_{\text{PAR}}}_{\text{ÍMPAR}}$$

$$\int_{-s}^{s} f(x) - P_f[-s,0,s](x)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-s}^{s} f(x)\,dx = \int_{-s}^{s} P_f[-s,0,s](x)}$$

↳ CONSEGUIMOS DEMONSTRAR!

Scanned by CamScanner

VOLTANDO A f QUALQUER:

↳ "a" PONTO ADICIONAL EM $[-s, s]$

DIFERENTE DE $-s, 0, s$

ENTÃO: $P_f[-s, 0, s, a] \in \mathbb{P}_3$

PELA AFIRMAÇÃO:

$$\int_{-s}^{s} P_f[-s, 0, s, a](x)\,dx = \int_{-s}^{s} P_f[-s, 0, s](x)\,dx$$

LOGO:

$$\left| \int_{-s}^{s} f(x) - P_f[-s, 0, s](x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-s}^{s} f(x) - P_f[-s, 0, s, a](x)\,dx \right| =$$

$$\leq \frac{M_f(4)}{4!} \int_{-s}^{s} |(x+s) \times (x-s)(x-a)|\,dx$$

CALCULAMOS O LIMITE

$a \to 0$

$$\int_{-s}^{s} f(x) - P_f[-s, 0, s](x)\,dx \leq \frac{M_f(4)}{4!} \int_{-s}^{s} x^2(s^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{M_f(4)}{24} \cdot 2 \int_{0}^{s} (s^2x^2 - x^4)\,dx = \frac{M_f(4)}{12} s^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) =$$

$$\boxed{\frac{M_f(4)}{90} s^5} \quad \text{OU} \quad \boxed{\frac{M_f(4)}{2880} h^5}$$

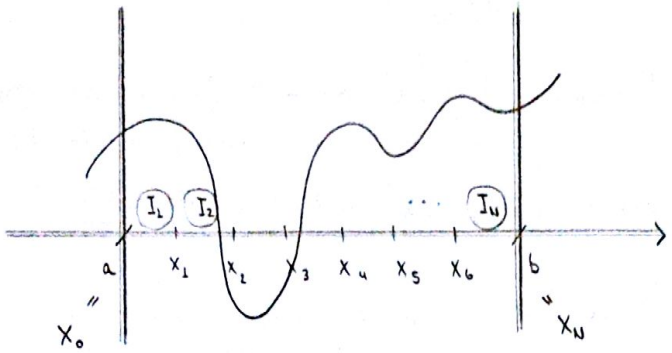
Scanned by CamScanner

AULA 11
02/06
①

MAP 3121

PROFESSOR EDUARDO COLLI | ESCRITO POR GEORGE EMILIANO

- RESULTADOS DA AULA PASSADA



↳ I_i CÉLULAS (OU REPETIÇÕES) DA PARTIÇÃO

Ⓐ MÉTODO DOS TRAPÉZIOS

$$\int_{I_i} f \approx \underbrace{|I_i|}_{(2s \text{ ou } h)} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

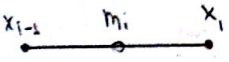
↳ ERRO: $\leq \frac{M_f^{(i)}(2)}{12} \cdot |I_i|^3$

ONDE $M_f^{(i)}(2) \geq \max_{I_i} |f''|$

Ⓑ MÉTODO DE Simpson

m_i = CENTRO DA CÉLULA

$m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$



$$\int_{I_i} f \approx |I_i| \cdot \frac{f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)}{6}$$

↳ ERRO: $\leq \frac{M_f^{(i)}(4)}{2880} \cdot |I_i|^5$

ONDE $M_f^{(i)}(4) \geq \max_{I_i} |f^{IV}|$

NOS DOIS MÉTODOS, USAR ESSAS INFORMAÇÕES PARA OBTER APROXIMAÇÕES PARA $\int_a^b f$ E UMA ESTIMATIVA DE ERRO PARA ESSA APROXIMAÇÃO:

Ⓐ MÉTODO DOS TRAPÉZIOS

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} f \approx \sum_{i=1}^{N} |I_i| \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

OLHE ESSA FÓRUMULA COMO UMA SOMA

$$\sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i)$$

$$\begin{cases} c_0 = \frac{|I_1|}{2}; \quad c_1 = \frac{|I_1|}{2} + \frac{|I_2|}{2}; \\ c_2 = \frac{|I_2|}{2} + \frac{|I_3|}{2}; \dots; \quad c_{N-1} = \frac{|I_{N-1}|}{2} + \frac{|I_N|}{2}; \\ c_N = \frac{|I_N|}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{N} c_i f(x_i) = |I_1| + |I_2| + \dots + |I_N| = b - a$$

ERRO DE APROXIMAÇÃO:

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{M_f^{(i)}(2)}{12} \cdot |I_i|^3$$

ONDE $M_f(2) \geq \max_{[a,b]} |f''|$

ENTÃO O ERRO: $\leq \frac{M_f(2)}{12} \sum_{i=1}^{N} |I_i|^3$

CASO DA PARTIÇÃO REGULAR:

$$\begin{cases} h = |I_i| \quad ; \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, m \\ h = \frac{b-a}{m} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Rightarrow$$

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)]$$

$$\boxed{\int_a^b f \approx (b-a) \cdot \frac{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)}{2N}}$$

ENQUANTO QUE O ERRO:

$$\text{ERRO} \leq \frac{M_f(2)}{12} m h^3 = \frac{M_f(2)}{12} m \frac{(b-a)^3}{m^3}$$

$$\boxed{\text{ERRO} \leq \frac{M_f(2)}{12} (b-a)^3 \cdot \frac{1}{m^2}}$$

ONDE $M_f(2) \geq \max_{[a,b]} |f''|$

③ MÉTODO DE SIMPSON:

↳ ANALOGAMENTE AO MÉTODO DOS TRAPÉZIOS

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=1}^{N} |I_i| \cdot \frac{f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)}{6}$$

$$\text{ERRO} \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{M_f^{(i)}(4)}{2880} |I_i|^5 \leq \frac{M_f(4)}{2880} \sum_{i=1}^{N} |I_i|^5$$

ONDE $M_f^{(i)}(4) = M_f(4)$

ONDE: $M_f(4) \geq \max_{[a,b]} |f^{IV}|$

PARTIÇÃO REGULAR: $h = |I_i| = \frac{b-a}{m}$

$$\int_a^b f \approx \frac{(b-a)}{6N} \sum_{i=1}^{N} [f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)]$$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{(b-a)}{6N} [f(x_0) + 4f(m_1) + 2f(x_1) + 4f(m_2) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{N-1}) + 4f(m_N) + f(x_N)]}$$

$$\boxed{\text{ERRO} \leq \frac{M_f(4)}{2880} (b-a)^5 \frac{1}{m^4}}$$

EXEMPLO:

ESTIME $\int_1^3 (3e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x)\, dx$ COM PRECISÃO DE 10^{-3} USANDO TRAPÉZIO E SIMPSON

1° PASSO: OBTER f'' E f^{IV}. SUPONHA:

$$\begin{cases} g(x) = A \cdot e^x \cos x + B \cdot e^x \operatorname{sen} x \\ g'(x) = (A+B) \cdot e^x \cos x + (-A+B) e^x \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$f(x) = 3e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x$

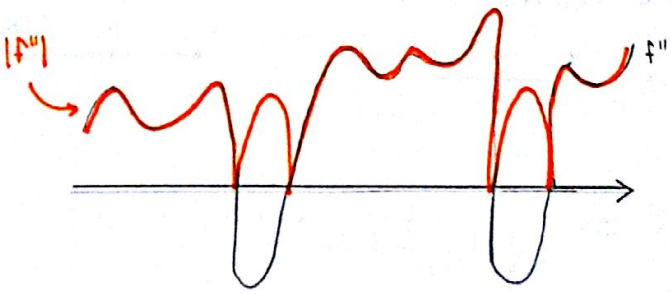
$f'(x) = 1 \cdot e^x \cos x + (-5) e^x \operatorname{sen} x$

$f''(x) = (-4) \cdot e^x \cos x + (-6) \cdot e^x \operatorname{sen} x$

$f'''(x) = (-10) \cdot e^x \cos x + (-2) \cdot e^x \operatorname{sen} x$

$f^{IV}(x) = (-12) \cdot e^x \cos x + 8 \cdot e^x \operatorname{sen} x$

2° PASSO: OBTER $M_f(2)$ E $M_f(4)$:



ACHAR $\max |f''|$ PODE SER TRABALHOSO, OS CANDIDATOS DEVEM SER PROCURADOS NOS PONTOS EXTREMOS a E b E EM TODOS OS PONTOS CRÍTICOS DE f'', ISTO É, TODOS OS ZEROS DE f'''

Scanned by CamScanner

AULA 11
02/06
③

↳ MANEIRA MAIS RÁPIDA

MÉTODO: $x \in [1,3]$ (INTERVALO DE 1)

$|f''(x)| \leq \dots \leq \dots \leq \dots \leq \underbrace{M_f(2)}_{\text{INDEPENDENTE DE } x}$

$|f''(x)| = |-4e^x \cos x - 6e^x \operatorname{sen} x| \leq$

$\leq |-4e^x \cos x| + |-6e^x \operatorname{sen} x| =$

$= 4e^x \underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} + 6e^x \underbrace{|\operatorname{sen} x|}_{\leq 1} \leq$

$\leq 4e^x + 6e^x \leq 10e^{\textcircled{x}} \leq 10e^{\textcircled{3}} <$ ($x \in [1,3]$)

$< \boxed{210 = M_f(2)}$

ENQUANTO QUE:

$|f^{IIII}(x)| \leq 20e^x < \boxed{420 = M_f(4)}$

3° PASSO: FÓRMULAS DE ERRO DOS DOIS MÉTODOS APENAS EM FUNÇÃO DE m.

Ⓐ MÉTODO DOS TRAPÉZIOS:

$$\frac{210}{12}(3-1)\cdot\frac{1}{m^2} = \frac{140}{m^2}$$

Ⓑ MÉTODO DE SIMPSON:

$$\frac{420}{2880}(3-1)^5\frac{1}{m^4} < \frac{4,7}{m^4}$$

4° PASSO: Ⓐ QUE "m" USAR PARA TRAPÉZIO?

QUERO "ERRO TRAPÉZIO" $< 10^{-3}$

EU SEI QUE:

"ERRO TRAPÉZIO" $\leq \frac{140}{m^2} < 10^{-3}$

OU SEJA, BASTA TOMAR "m" TAL QUE

$$\frac{140}{m^2} < 10^{-3} \iff m^2 > 140.000 \iff$$

$$m > \sqrt{140.000} = 374,1\dots$$

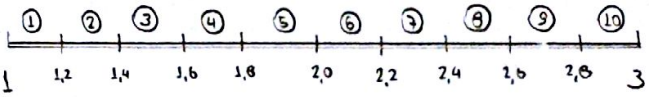
BASTA TOMAR $\boxed{m = 375 \text{ ou mais}}$

Ⓑ QUE "N" USAR PARA SIMPSON?

FAÇA $\frac{4,7}{m^4} < 10^{-3} \iff m^4 > 4700 \iff$

$$m > \sqrt[4]{4700} = 8,2\dots$$

BASTA TOMAR $\boxed{m \geq 9}$, $m = 10$



↳ 10 CÉLULAS!

5° PASSO: OBTER $\int_1^3 f \approx$

1.0	-0,1686
1.1	-1,2666
1.2	-2,5797
1.3	-4,1266
1.4	-5,9246
1.5	-7,9899
1.6	-10,3357
1.7	-12,9725
1.8	-15,9063
1.9	-19,1382
2.0	-22,6625
2.1	-26,4662
2.2	-30,5271
2.3	-34,8123
2.4	-39,2768
2.5	-43,8615
2.6	-48,4919
2.7	-53,0756
2.8	-57,5011
2.9	-61,6353
3.0	-65,3225

DICA SOBRE A CASA DECIMAL:

$$\frac{(1+b-a)}{2} \times 10^N << 10^{-3}$$

APLICANDO:

$$\frac{b-a}{6N}\left[f(x_0) + f(x_N) + 2\sum f(x_i) + 4\sum f(m_i)\right]$$

$$\int_1^3 f(x) = -53,11$$

- $\sum f(x_i) = -233,2057$
- $\sum f(m_i) = -265,3447$

Scanned by CamScanner

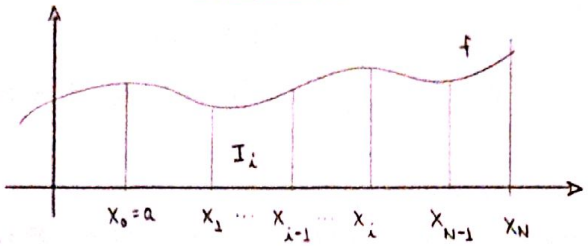
AULA 12
01/06

MAP 3121

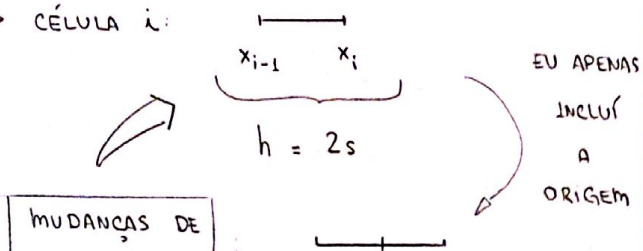
①

• INTEGRAÇÃO (OU QUADRATURA) GAUSSIANA

↳ MÉTODOS COMPOSTOS DE INTEGRAÇÃO



↳ CÉLULA i:



↳ $f[-s, s] \longrightarrow \mathbb{R}$

↳ HÁ VÁRIAS MANEIRAS DE APROXIMAR $\int_{-s}^{s} f$

EM TODAS ELAS (DESSE CURSO), A IDEIA É A MESMA: TROCAR "f" POR UM POLINÔMIO INTERPOLADOR E INTEGRAR ESSE POLINÔMIO

TUDO COMEÇA NA ESCOLHA DOS PONTOS DA INTERPOLAÇÃO:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_K \in [-s, s] \Rightarrow$$

$$P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K] \in \mathbb{P}_{K-1}$$

ENTÃO: $\int_{-s}^{s} f \approx \int_{-s}^{s} P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]$

↳ PARA OS EXEMPLOS VISTOS ANTERIORMENTE:

① TRAPÉZIOS $K = 2$ $\alpha_1 = -s$ $\alpha_2 = s$

② SIMPSON $K = 3$ $\alpha_1 = -s$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = s$

PARA OBTER A FÓRMULA NOS DOIS CASOS, OBTIVEMOS O INTERPOLADOR USANDO DIFERENÇAS DIVIDIDAS (MATÉRIA JÁ DADA!)

PODEMOS USAR LAGRANGE!

↳ POLINÔMIOS DE LAGRANGE RELATIVOS AOS PONTOS $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ SÃO:

- $L_1, L_2, \dots, L_K \in \mathbb{P}_{K-1}$
- $L_i(\alpha_i) = 1$; $L_i(\alpha_j) = 0$; $j \neq i$

FÓRMULA DE LAGRANGE (MATÉRIA JÁ DADA!)

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$

↳ $j = 1, 2, \dots, K$

↳ $P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_K](x) = f(\alpha_1)L_1(x) + \dots + f(\alpha_K)L_K(x)$

PORTANTO:

$$\int_{-s}^{+s} P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K](x) = f(\alpha_1)\underbrace{\int_{-s}^{s} L_1(x)}_{C_1} + f(\alpha_2)\underbrace{\int_{-s}^{s} L_2(x)}_{C_2} + \dots + f(\alpha_K)\underbrace{\int_{-s}^{s} L_K(x)}_{C_K}$$

$$\int_{-s}^{+s} P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K](x) = \sum_{i=1}^{K} c_i f(\alpha_i)$$

↳ COMBINAÇÃO LINEAR DOS VALORES DA f NOS PONTOS INTERPOLADOS.

OBSERVAÇÃO: $\sum_{i=1}^{K} c_i = 2s$ (ou h)

↳ TAMANHO DA CÉLULA

• **POR QUÊ?**

SUPONHA f CONSTANTE $= 1$

Scanned by CamScanner

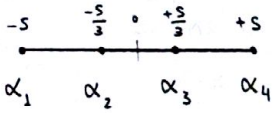
$$2s = \int_{-s}^{s} f \approx \int_{-s}^{s} p_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K] \quad \text{(EXATA)} \Rightarrow$$

$$2s = \sum_{i=1}^{K} c_i \underbrace{f(\alpha_i)}_{=1} = \sum_{i=1}^{K} c_i$$

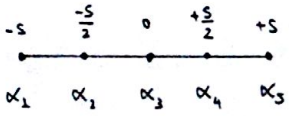
PODERÍAMOS GENERALIZAR TRAPÉZIOS E SIMPSON ESCOLHENDO OS $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ DE MODO A FORMAR UMA PARTIÇÃO REGULAR DA CÉLULA

- POR EXEMPLO:

I) $K = 4$



II) $K = 5$



QUEM SÃO OS c_i's DOS TRAPÉZIOS?

$$\int_{-s}^{s} p_f[-s; +s] = (2s) \cdot \frac{f(-s) + f(s)}{2}$$

$$\int_{-s}^{s} p_f[-s; +s] = \underbrace{s}_{c_1} f(-s) + \underbrace{s}_{c_2} f(s)$$

E SIMPSON?

$$\int_{-s}^{s} p_f[-s; 0; +s] = (2s) \cdot \frac{f(-s) + 4f(0) + f(s)}{6}$$

$$\int_{-s}^{s} p_f[-s; 0; +s] = \underbrace{\frac{s}{3}}_{c_1} f(-s) + \underbrace{\frac{4s}{3}}_{c_2} f(0) + \underbrace{\frac{s}{3}}_{c_3} f(s)$$

RECORDAÇÃO: POLINÔMIOS DE LEGENDRE

- GRAU CRESCENTE P_ℓ e $\tilde{P}_\ell$ $(\ell = 0, 1, 2 \dots)$
- ORTOGONAIS ENTRE SI PARA O PRODUTO INTERNO CANÔNICO EM $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} P_\ell \cdot P_m = 0 \quad \text{SE } \ell \neq m$$

↳ NORMALIZANDO PARA TER COEFICIENTE LÍDER = 1, TEMOS:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

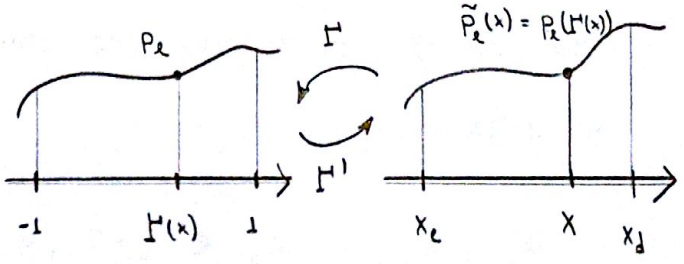
$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

↳ FATO: PARA CADA $\ell \geq 0$, P_ℓ TEM EXATAMENTE ℓ RAÍZES: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$

↳ E EM OUTROS INTERVALOS?



* H: MUDANÇA AFIM QUE PRESERVA A ORIENTAÇÃO.

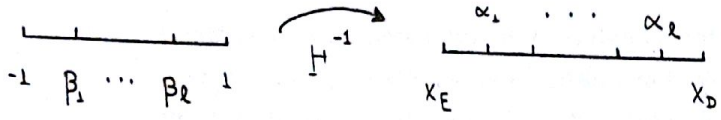
ACONTECE QUE OS POLINÔMIOS $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_\ell, \dots$ SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI PARA O PRODUTO INTERNO CANÔNICO EM $[X_E, X_D]$:

Scanned by CamScanner

AULA 12
07/06
③

$$\int_{X_E}^{X_D} \tilde{P}_\ell \cdot \tilde{P}_m = 0 \qquad \text{SE } \ell \neq m$$

AS RAÍZES $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$ DE P_ℓ $[-1, 1]$ SÃO ENVIADAS POR Γ^{-1} NAS RAÍZES $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ EM $[X_E, X_D]$



INTEGRAÇÃO GAUSSIANA NO INTERVALO (CÉLULA) $[X_E, X_D]$:

1° PASSO: ESCOLHA um $\ell \geq 1$

2° PASSO: ACHE AS RAÍZES DE $\tilde{P}_\ell$: $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\ell$

3° PASSO:

$$\int_{X_E}^{X_D} f \approx \int_{X_E}^{X_D} P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell] = \sum_{i=1}^{\ell} c_i f(\alpha_i)$$

* $$c_i = \int_{X_E}^{X_D} L_i(x)\,dx$$

SUBSTITUIÇÃO: $y = \Gamma(x)$

$$x = \Gamma^{-1}(y)$$

$$dx = (\Gamma^{-1})' dy \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\Gamma'} dy$$

ENTÃO $$\frac{1}{\Gamma'} = \frac{X_D - X_E}{2}$$

$$c_i = \int_{-1}^{+1} (L_i \circ \Gamma^{-1})(y) \cdot \frac{1}{\Gamma'} dy = \frac{1}{\Gamma'} \int_{-1}^{+1} L_i \circ \Gamma^{-1}$$

MAS OS $L_i \circ \Gamma^{-1}$ SÃO OS POLINÔMIOS DE LAGRANGE PARA AS RAÍZES DE P_ℓ $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell)$ EM $[-1, 1]$

CONCLUSÃO:

$$\int_{X_E}^{X_D} P_f[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell] = \frac{X_D - X_E}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\left(\int_{-1}^{+1} \hat{L}_i\right)}_{\text{LAGRANGES DOS } \beta_i\text{'S}} \underbrace{f_\circ \Gamma(\beta_i)}_{\alpha_i\text{'S}}$$

OBSERVAÇÃO: O MÉTODO É EXATO PARA POLINÔMIOS DE GRAU ATÉ $(2\ell - 1)$

$$\text{ERRO} \leq C \cdot h^{2\ell - 1}$$

- $\ell = 2$ (2 PONTOS): $C h^5$
- $\ell = 3$ (3 PONTOS): $C h^7$

EXEMPLO DO LIVRO:

$\ell = 3$ $\qquad \int_1^3 x^6 - x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x)\,dx$

→ 1 CÉLULA: $[1, 3]$