1ª semana

15/02/

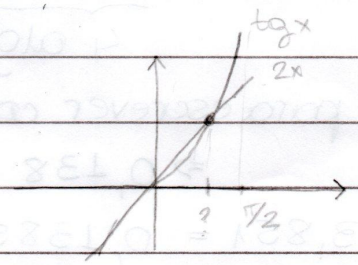
Métodos Numéricos e Aplicações

Prof. Salvador, sala 294-A
email: sazahata@ime.usp.br

Bibliografia: Análise Numérica - Burden e Faires

1º tópico: Zeros de funções

ex: $2x - \operatorname{tg} x = 0$



Vão querer saber: a raiz está em $\left[1{,}23 - \frac{10^{-5}}{2}, 1{,}23 + \frac{10^{-5}}{2}\right]$

Introdução:

→ Tipos de Erros embutidos no processo de resolver problemas em máquinas

- Erro no modelo matemático
- Erro de truncamento e arredondamento
- Erro nos dados

→ Erro de truncamento

Põe numa máquina:

$\sqrt{14} = 3{,}74\underline{(165)}$

Imagine que trabalha com 3 algarismos significativos

(Truncar é "cortar", "jogar fora o rabo"

ou seja, ela não "enxerga" o quarto algarismo

∴ Truncamento: jogar o resto do número a partir de uma certa posição fora.

15/02/

→ Erro de arredondamento

Arredondamento: antes de jogar o rabo do número fora, arredonda o alg. anterior para cima, se o primeiro algarismo do rabo for maior ou igual a 5.

Ex: 4 alg. significativo

$\sqrt{14} = 3,742$

Ex: 1) $1383 = \underbrace{0,1383}_{\text{4 alg. significativos}} \cdot 10^4$

↳ para escrever com 3 alg. significativos:

$\Rightarrow 0,138 \cdot 10^4 = 1380$

2) $13,851 = \underbrace{0,13851}_{\text{5 alg. signif.}} \cdot 10^2$

↳ para escrever com 3 alg. significativos:

$\Rightarrow 0,139 \cdot 10^2 = 13,9$

→ Problemas com a aritmética gerados pelo truncamento e arredondamento

ex: (Faça as contas com 3 alg. significativos)

- $4,26 + 9,24 + 5,04 =$

  $\overline{13,5} + 5,04 = 18,5$

- $4,26 + 9,24 + 5,04 =$

  $4,26 + \overline{14,3} = 18,6$

Em máquinas com milhões de operações, o erro se acumula e pode afetar significativamente (erro pode aumentar a casa, por exemplo).

- $15,9 \times (4,99 + 0,02) = 79,7$
- $15,9 \times 4,99 + 15,9 \times 0,02 = 79,6$

15/02/

Zeros de Funções

Ex: Encontre com precisão 10^{-3} a raiz de $f(x) = x^3 - 2$.

Sol: Achar intervalo que contenha a raiz.

Para isso, devemos tentar esboçar seu gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{e } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \therefore f(x) \text{ é estritamente crescente.}$$

$\therefore$ Só pode ter uma ou zero raiz real

Tentemos então achar um intervalo onde f troca de sinal.

$x = 1 \rightarrow f(x) < 0$ * (mesma coisa)

$x = 2 \rightarrow f(x) > 0$

$I = [1, 2] \ni \bar{x}$

* Como $f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow \exists$ raiz de f em $[1, 2]$

$\Rightarrow$ Como achar a sequência de aproximação da raiz?

Começa pelo meio: $x_0 = 1{,}5$ (erro $\leq 0{,}5 \rightarrow |x_0 - \bar{x}| \leq 0{,}5$)

Agora, p/ saber em qual das duas metades: $[1, 1.5]$ ou $[1.5, 2]$ está a raiz, calculo

$f(x_0) > 0 \Rightarrow x \in [1, 1.5]$

pois $f(1) < 0$ e $f(1{,}5) > 0$

$\rightarrow x_1 = 1{,}25$ (erro $\leq \frac{|1 - 1{,}5|}{2} = 0{,}25$)

$f(1{,}25) < 0 \Rightarrow x \in [1.25, 1.5]$

pois $f(1.25) < 0$ e $f(1.5) > 0$

$\rightarrow x_2 = 1{,}375$

$\vdots$

Quantas vezes tem que fazer?

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

erro $\leq 10^{-3} = \frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow n = 9$ vezes.

∴ Quantas vezes tenho que rodar o loop?

Até que:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\overbrace{2-1}^{\text{extremos de } x}}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$$

IMPONHO!

tiro o valor de n

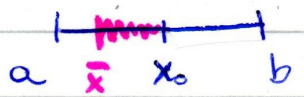
Bissecção ou Dicotomia

→ Ponto de partida:

Temos $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e é sabido que f tem uma única raiz em $[a,b]$.

O método consiste em construir uma série de aproximações para a tal raiz de f, denotada $\bar{x}$, tal que essa aproximações convirjam para $\bar{x}$.

Como fizemos isso?



a zerésima aproximação é

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x_0, \bar{x}) = |x_0 - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2}$$

Para achar a próxima, fazemos o seguinte teste:

Comparamos o sinal de $f(x_0)$ com o sinal de f em a e em b. O novo intervalo será, ou $[a, x_0]$ ou $[x_0, b]$, aquele onde f troca de sinal.

Agora supondo que ficou com $[a, x_0]$, então:

$x_1 = \dfrac{a + x_0}{2}$ e agora compara o sinal de $f(x_1)$

com $f(a)$ e $f(b)$, ficando com o intervalo onde houver troca de sinal, por exemplo $[x_1, x_0]$.

$$\text{dist}(x_1, \bar{x}) \leq \text{comprimento do intervalo} = \frac{[a, x_0]}{2}$$

$$= \frac{b-a}{2} \Big/ 2 = \frac{b-a}{2^2}$$

(erro)

$$\therefore \boxed{\text{dist}(x_n, \bar{x}) \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

e $\therefore$ $x_n \to \bar{x}$

→ Sequências numéricas

<u>Def</u>: Uma sequência numérica é uma função $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, comumente denotada $a_n = a(n)$, $n \in \mathbb{N}$

→ Ex: $a_n = 3 + 5n$ $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

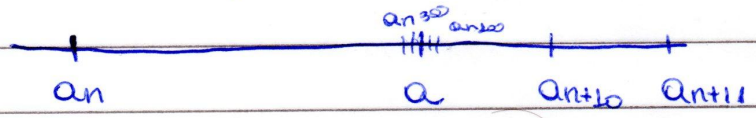
$a_n = 2.7^n$

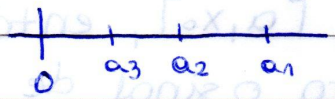
$a_n = \ln(n)$ $\quad a_n = (\text{sen}(n^2))^3$

$a_n = \dfrac{1}{n}$

<u>Def</u>: Dizes que a sequência $a_n \in \mathbb{R}$ converge para um número real a, se e só se

$$\text{dist}(a_n, a) = |a_n - a| \xrightarrow{i \to \infty} 0$$



Ex: 1) 

$\rightarrow a_n = \frac{1}{n}$, converge para 0

2) $a_n = \sqrt{2 + a_{n+1}}$, converge para?

$a_0 = \sqrt{2}$

$a_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\vdots$

$a_n \rightarrow ?$

Supondo que existe limite $= L$

$a_\infty = L = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}$

$L^2 = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}+\dots}$

$L^2 = 2 + L$

$L^2 - L - 2 = 0$

$L = 2$

3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, converge p/ 0

4) $a_n = \text{sen}(n)$ não converge

Def: Dada uma sequência a_n que converge para um $a \in \mathbb{R}$, dizemos que a convergência é monótona se

ou $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < a$

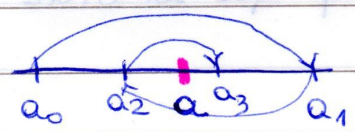
ou

$a_0 > a_1 > a_2 \dots$

Ex: $a_n = \frac{1}{n}$, monótona decrescente

$a_n = \frac{-1}{n}$, monótona crescente

E a convergência de a_n para a é alternada, se:



Ex: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Métodos de Aproximações Sucessivas

$x_0 = 5$

$x_1 = 0{,}28366$

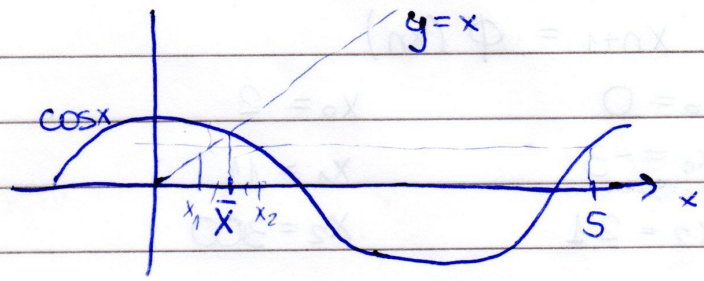
$x_2 = 0{,}9600$

$x_3 = 0{,}5734$

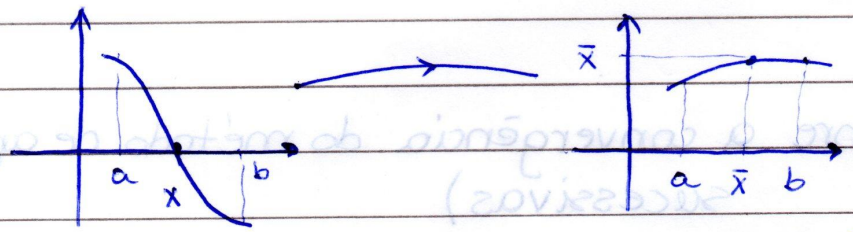
$\vdots$

$x_n = 0{,}731\ldots$

$x_n = \cos(x_{n-1})$



Um método de aproximações sucessivas consiste em:



ponto final de ϕ

$\phi(\bar{x}) = \bar{x}$

$x_n = \phi(x_{n-1})$

Temos então dois problemas aqui:

1°) Dada uma $\phi [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, onde $\bar{x}$ é a raiz de f, quais propriedades ϕ deve ter para que a sequência $x_n = \phi(x_{n-1})$, começado num certo $x_0 \in [a,b]$, convirja para $\bar{x}$.

2°) Como encontrar uma ϕ que satisfaz as propriedades de 1°.

Ex: $f(x) = 3x^2 - 3$, $I[0,2]$

$$\phi(x) = 3x^2 + x + 3 = f(x) + x$$

$$\phi(\bar{x}) = \underbrace{(3\bar{x}^2 - 3)}_{0} + \bar{x} = \bar{x}$$

$x_{n+1} = \phi(x_n)$

$x_0 = 0$	$x_0 = 2$	$x_0 = 1,1$
$x_1 = -3$	$x_1 = 11$	$x_1 = 1,73$
$x_2 = 21$	$x_2 = 300$	$x_2 = 7,70$

não tá convergindo

$\therefore$ NÃO FUNCIONOU

<u>Teorema</u> (sobre a convergência do método de aprox. sucessivas)

Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, para um certo $\bar{x} \in [a,b]$. Então, se:

a) ϕ e ϕ' forem contínuas em $[a,b]$

b) $\max |\phi'(x)| \leq k < 1$, $x \in [a,b]$

c) x_0 for o extremo de $[a,b]$ mais próximo de $\bar{x}$.

A sequência $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge para $\bar{x}$.

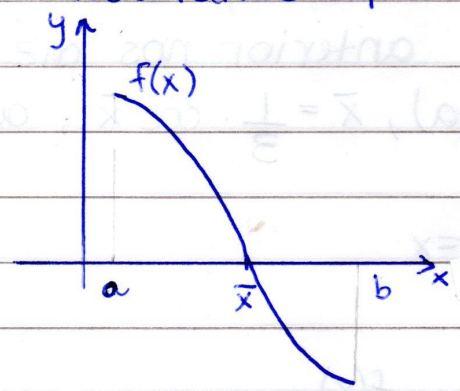
$\hookrightarrow = x_0, \phi(x_0), \phi(\phi(x_0)), \phi(\phi(\phi(x_0)))$

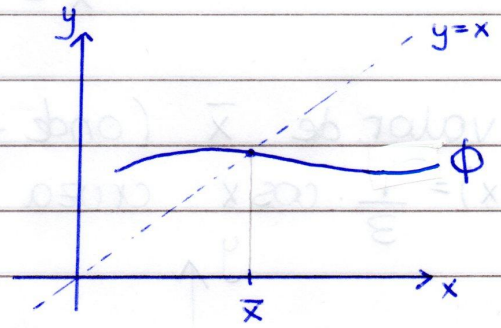
$= x_0, x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), x_3 = \phi(x_2)$

Numérico

... retomando o teorema do método de aprox. sucessivas:

→ ilustrando ϕ:





"ϕ cruza a diagonal onde a f se anula".

$f(a).f(b) < 0$

ou seja: f(x) tem raiz única em [a,b]

Exemplo

Dado $f(x) = 3x - \cos x$ encontre uma ϕ para a qual o método de aprox. sucessivas funcione. Encontre x_0 para o qual isso ocorre.

1º) esboçar o gráf. de f para saber quantas raízes ele tem.

$f'(x) = 3 + \operatorname{sen} x \geq 2$ sempre em $\mathbb{R}$

∴ f(x) é estritamente crescente (tem 0 ou 1 raiz)

2º) agora, devemos achar um intervalo onde f troca de sinal, se o mesmo existir.

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) > 2 > 0$

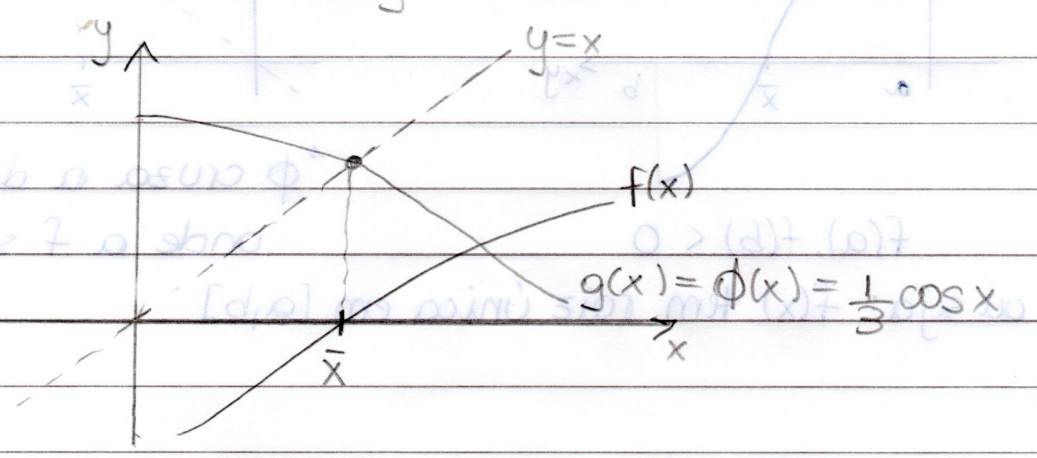
Logo f tem uma única raiz real situada em [0,1].

⇒ Achando ϕ:

ϕ deve ter um ponto fixo onde f se anula

Analisando $f(x) = 3x - \cos x = 0$

$x = \frac{\cos x}{3}$ ← essa equivalência anterior nos diz que no valor de $\bar{x}$ (onde f se anula), $\bar{x} = \frac{1}{3} \cdot \cos \bar{x}$, ou seja $g(x) = \frac{1}{3} \cdot \cos x$ cruza $y = x$.



Agora, vamos verificar se a tal ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema:

1) $\phi(x) = \frac{\cos x}{3}$ e $\phi'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{3}$ são contínuos em $[0,1]$ ✓

2) $\max |\phi'(x)| \leq \frac{1}{3}$, $x \in [0,1]$ ✓

3) Como $f(1/2) > 0$ e $f(0) < 0 \Rightarrow \bar{x} \in [0, 1/2] \Rightarrow$ 0 é o extremo de $[0,1]$ mais próximo de $\bar{x}$.

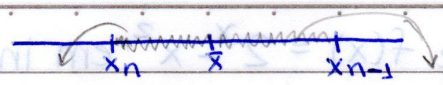
Logo, a sequência:

$x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1/3 \cos 1/3$, $x_3 = 1/3 \cos x_2, \ldots$,

converge para $\bar{x}$.

Essa é uma convergência alternada.

<u>Prova</u>:



$$|x_n - \bar{x}| \qquad\qquad |x_{n-1} - \bar{x}|$$

Queremos encontrar uma relação entre os dois números acima, que valha para todo n, que implique que:

$$|x_n - \bar{x}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$x_n - \bar{x} = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\bar{x})| = (T.V.M)\ |\phi_{c_{n-1}}| . |x_{n-1} - \bar{x}| \leq$$

$$\leq k . \underbrace{|x_{n-1} - \bar{x}|}_{\text{dist } x_{n-1} \text{ até } \bar{x}} \qquad (\max |\phi'(x)| \leq k < 1)$$

Assim, para qualquer $n \geq 0$, tal que x_{n-1} e $x_n \in [a,b]$, vale $|x_n - \bar{x}| \leq k . |x_{n-1} - \bar{x}|$, suponha então que, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \in [a,b]$:

$$|x_1 - \bar{x}| \leq k . |x_0 - \bar{x}|$$

$$|x_2 - \bar{x}| \leq k . |x_1 - \bar{x}| \leq k^2 . |x_0 - \bar{x}|$$

$$|x_3 - \bar{x}| \leq k |x_2 - \bar{x}| \leq k^2 . |x_1 - \bar{x}| \leq k^3 |x_0 - \bar{x}|$$

$$\vdots$$

$$|x_n - \bar{x}| \leq k^n . \underbrace{|x_0 - \bar{x}|}_{\leq b-a} \leq k^n (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

pois $0 < k < 1$

Voltando para o exemplo:

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{3} . (1-0)$$

... continuando <u>Prova</u>:

Vamos agora mostrar que, com os nossas hipóteses, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $\forall n \geq 0$

$$|x_1 - \bar{x}| = |\phi(x_0) - \phi(\bar{x})| = |\phi'(c_0)| . |(x_0 - \bar{x})|$$

$\hookrightarrow \in [x_0, \bar{x}]$

$\hookrightarrow \therefore x_1 \in [a,b]$

<u>Ex</u>: veja que neste caso não dá mais pra sair de $[a,b]$.

Ex: Isole as raízes de $f(x) = 2^x - x^2$ em intervalos, contendo uma só, cada um deles.

(Ele esqueceu de fazer)

3ª semana

Numérico

aula passada...

$|x_n - \bar{x}| \leq K^n . |x_0 - \bar{x}|$ $\Leftarrow$ $|x_n - \bar{x}| \leq K |x_{n-1} - \bar{x}|$

<u>Lema</u>: Nas hipóteses do Teorema anterior:

Calculado $\phi\left(\frac{a+b}{2}\right)$:

a) Se $\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) > \left(\frac{a+b}{2}\right)$, b é o extremo de $[a,b]$ é o extremo mais próximo de x_0.

b) Se $\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) < \left(\frac{a+b}{2}\right)$, a é o extremo.

$$\phi(x_m) - \phi(\bar{x}) = \phi'(c) . (x_m - \bar{x})$$

intervalo entre x_m e $\bar{x}$

$$|a-c| < |b-c|$$

$$|\phi(x_m) - \bar{x}| \leq K . |x_m - \bar{x}$$

<u>Obs</u>: Ainda nas hipóteses do Teorema:

1) Se $\phi'(x) > 0$ em $[a,b]$, a convergência é <u>monótona</u>.

2) Se $\phi'(x) < 0$ em $[a,b]$, a convergência é <u>alternada</u>.

<u>Exemplo</u>: $f(x) = 3x - \cos x$

$\phi(x) = \frac{\cos x}{3}$ $\qquad I = [0, 1]$

$\phi(1/2) < 1/2 \rightarrow$ o extremo mais próximo é o 0.

Nas aulas anteriores, já vimos que a $\phi(x)$ acima satisfaz as hipóteses do Teorema de Convergência.

$x_0 = 0 \longleftarrow$ (dá certo)

Determine uma aproximação de $\bar{x}$, o ponto fixo de ϕ, com erro $< 10^{-8}$.

$0, \phi(0), \phi(\phi(0)), \phi(\phi(\phi(0))), \ldots$, converge para $\bar{x}$.

$$|x_n - \bar{x}| \leq K^n \cdot \underbrace{|x_0 - \bar{x}|}_{\leq (1-0)}$$

K deu $0{,}2804\ldots \rightarrow \phi'(x)_{max} = \frac{\operatorname{sen} 1}{3}$

usamos $K = 0{,}281$

$$\therefore |x_n - \bar{x}| \leq (0{,}281)^n \cdot 1 < 10^{-8}$$

$$0{,}281^n < 10^{-8}$$

$$\frac{1}{0{,}281^n} > 10^8$$

$$3{,}57^n > 10^8$$

$$n \cdot \log 3{,}57 > 8 \cdot \log 10$$

$$n > \frac{8}{\log_{10} 3{,}57} = 14{,}47 \Rightarrow \boxed{n \geq 15}$$

Mais uma fórmula de erro:

Nas hip. do Teorema de Convergência, vale:

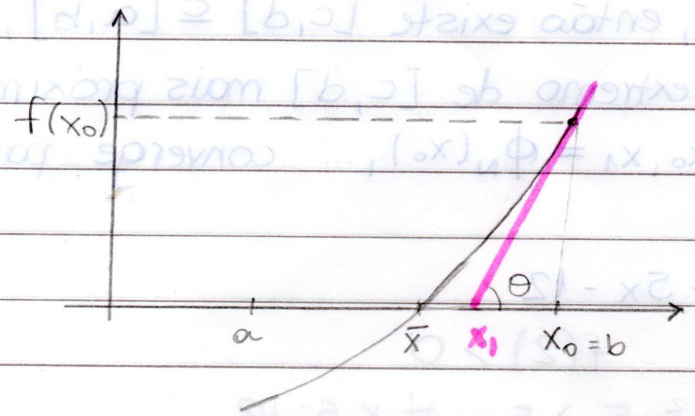
$$|x_n - \bar{x}| < \left(\frac{K}{1-K}\right) \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad , \; 1 > K \geq \max_{x \in [a,b]} |\phi'(x)|$$

→ Nas hipóteses do Teorema, ϕ pode ter mais de um ponto físico em $[a,b]$?

↳ Se isso ocorrer, ϕ' tem que ser $= 1$ em algum lugar, o que não segue as hipóteses estabelecidas.

$\therefore$ Não, ϕ só tem um ponto físico em $[a,b]$.

Método de Newton (ou das tangentes)



$tg\,\theta = f'(x_0)$

↳ coef. angular

$$tg\,\theta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}} \Longrightarrow \boxed{\phi_{Newton}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com f', f'' contínuas tais que $\begin{cases} f'(x) \neq 0 \text{ em } [a,b] \\ f''(x) \neq 0 \text{ em } [a,b] \end{cases}$

Assuma que f se anula em $\bar{x} \in [a,b]$.

$$\phi_{Newton}(x) = x - f(x)/f'(x)$$

$$\phi_{Newton}(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{\overset{=0}{f(\bar{x})}}{\underset{\neq 0}{f'(\bar{x})}} = \bar{x} \;//$$

$$\phi'_{Newton}(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x).f(x))}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x).f(x)}{f'(x)^2} \;//$$

$$\therefore \boxed{\phi'_{Newton}(\bar{x}) = 0}$$

Teorema preliminar: Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $f'(x)$ também é contínua em $[a,b]$ e $f'(x) \neq 0$ em $[a,b]$ e f tem raiz $\bar{x} \in [a,b]$, então existe $[c,d] \subseteq [a,b]$, $\bar{x} \in [c,d]$, tal que se x_0 for o extremo de $[c,d]$ mais próximo de $\bar{x}$, então a sequência $x_0, x_1 = \phi_N(x_0), \ldots$ converge para $\bar{x}$.

Exemplo $f(x) = x^3 + 5x - 12$

$f(1) = -6 \quad f(2) > 0$

$f'(x) = 3x^2 + 5 > 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \exists$ raiz real de f e ela está entre 1 e 2

$$\phi_N(x) = x - \left(\frac{x^3+5x-12}{3x^2+5}\right) \to \phi_N(x) = \frac{6x \cdot (x^3+5x-12)}{(3x^2+5)^2}$$

Teorema convergência do Método de Newton

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Suponha que $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas em $[a,b]$ e:

i) $f'(x) \neq 0$ em $[a,b]$;

ii) $f''(x) \neq 0$ em $[a,b]$;

Então se $x_0 = \begin{cases} a, & \text{caso } \phi_N(a) \in [a,b], \\ b, & \text{caso contrário} \end{cases}$

a sequência $x_0, x_1 = \phi_N(x_0), x_2 = \phi_N(x_1), \ldots$ converge p/ $\bar{x}$.

Exemplo $f(x) = x^3 + 5x - 12$

Encontre $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que o método de Newton começado em x_0 convirja para a única raiz real de f. Justifique.

Como $f(1).f(2) < 0$ e $f'(x) = 3x^2 + 5 \geq 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$

f é estritamente crescente e tem 1 raiz real em $[1,2]$

Agora, tentemos aplicar o teorema anterior

i) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [1,2]$ ✓

ii) $f''(x) = 6x \neq 0$, $\forall x \in [1,2]$ ✓

$\Downarrow$

$$x_0 = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi_N(1) \in [1,2] \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\phi_N(x) = x - \left(\frac{x^3 + 5x - 12}{3x^2 + 5}\right)$$

$$\phi_N(1) = 1 - \left(\frac{-6}{8}\right) = \frac{7}{4} < 2 \Rightarrow x_0 = 2 \text{ serve}$$

$$\phi_N'(x) = \underbrace{6x}_{>0 \text{ em } [1,2]} \cdot \frac{(x^3 + 5x - 12)}{(3x^2+5)^2}$$

$\therefore \phi_N'(x)$ tem o sinal da $f(x) = x^3 + 5x - 12$

Na calculadora: $1, 1.75, 1.6013, 1.5925, \ldots$

$\ldots, 1.5924 \ldots$

$\overset{\shortparallel}{\theta}$

- Se $\phi_N(\theta - 10^{-3}) > \theta - 10^{-3} \Rightarrow \theta - 10^{-3} < \bar{x} < \theta$

  e portanto $|\theta - \bar{x}| < 10^{-3}$ e acabou.

- se $\phi_N(\theta - 10^{-3}) < \theta - 10^{-3} \Rightarrow \bar{x} < \theta - 10^{-3} < \theta$, então tem que iterar mais algumas vezes e fazer a checagem de novo.

$\theta - 10^{-3} = 1{,}5915$

$\phi_N(1{,}5915) > 1{,}5915$

$\Downarrow$

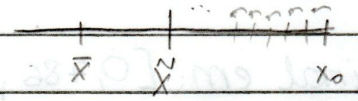
$\bar{x} \in [1{,}5915,\ 1.5925]$ //

4ª semana

D S T Q Q S S

Numérico

Relembrando...



Quero saber se a distância de $\tilde{x}$ até $\bar{x}$ é menor que um erro $\varepsilon > 0$ dado.

$\tilde{x} - \varepsilon$ pode, ou não, estar a esquerda de $\bar{x}$.

Se $\tilde{x} - \varepsilon < \bar{x}$, como $\tilde{x} > \bar{x}$, acabou, pois $|\tilde{x} - \bar{x}| < \varepsilon$.

Como fazer isso?

Calculado $\phi(\tilde{x} - \varepsilon)$ e comparando com $\tilde{x} - \varepsilon$.

① Se $\phi(\tilde{x} - \varepsilon) > \tilde{x} - \varepsilon \Rightarrow \tilde{x} - \varepsilon < \bar{x}$ e acabou.
② Se $\phi(\tilde{x} - \varepsilon) < \tilde{x} - \varepsilon \Rightarrow \tilde{x} - \varepsilon > \bar{x}$ e é necessário fazer mais iterações e depois checar de novo.

Exemplo

Ache a raiz de $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$ pelo método de Newton com erro $\leq 10^{-3}$ (a que estiver em $]0, \pi/2[$). Justifique tudo.

$f(0) = 0$?

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2$

$f'(0) = -1$

$\left.\begin{array}{l} f(0{,}1) < 0 \\ f(1{,}55) > 0 \end{array}\right\}$ f tem pelo menos uma raiz em $[0{,}1 , 1{,}55]$

OBS

$f(\pi/4) < 0$

$f'(\pi/4) = 0$

$f(0{,}786) < 0$

Agora sabemos então que f troca de sinal em $[0{,}786, 1{,}55]$ e $f'(x)$ não se anula nesse intervalo $\Rightarrow$ f tem 1 raiz nele.

Agora tentemos aplicar o Teorema de convergência do método de Newton:

i) $f'(x) \neq 0$ em $[0{,}786, 1{,}55]$ ✓

ii) $f''(x) = \dfrac{+2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$ ✓

$\hookrightarrow \neq 0$ no intervalo

$$\phi_N(x) = x - \left(\frac{\operatorname{tg} x - 2x}{\frac{1}{\cos^2 x} - 2} \right)$$

$\phi_N(0{,}786) \notin$ intervalo

$\Downarrow$

$x_0 = 1{,}55$

$1{,}166 - 10^{-3} = 1{,}165$

$\phi(1{,}165) > 1{,}165$

$\parallel$

$1{,}1655 > 1{,}165$

Acabou!

R: $\bar{x} \overset{N}{=} 1{,}1655 \pm \dfrac{10^{-3}}{2}$

$1{,}166 \pm 10^{-3}$

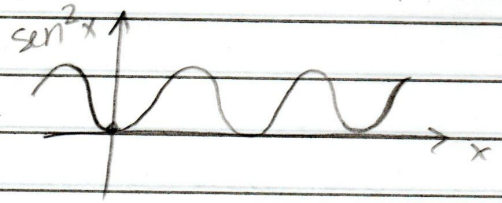
OBS

Velocidade de Convergência no Método de Newton

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |\phi(x_n) - \bar{x}| \leq \left|\bar{x} + \underbrace{\phi'(x)}_{=0}(x_n - \bar{x}) + \max_{x\in[a,b]} |\phi''(x)| \cdot \frac{(x_n-\bar{x})^2}{2} - \bar{x}\right|$$

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{\left|\max_{x\in[a,b]} |\phi''(x)|\right|}{2} \cdot |x_n - \bar{x}|^2$$

Exemplo: (ruim para M. de Newton)



(f é ruim pois tem derivada zero na raiz)

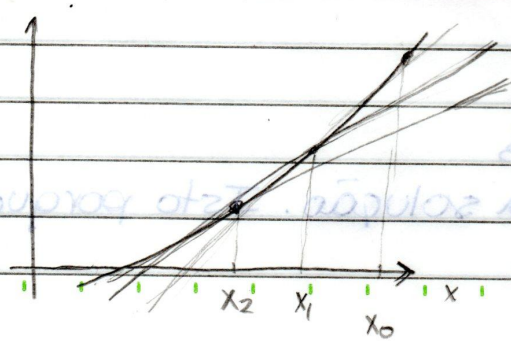
$$\phi_N(x) = x - \frac{sen^2 x}{2\, sen x \cdot \cos x} = x - \frac{tg\, x}{2}$$

$$\phi'_N(x) = 1 - \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$\phi'_N(0) = \frac{1}{2} \neq 0$$

se escolhe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to 0$, então $|x_{n+1} - 0| \leq (\frac{1}{2} + 0{,}1) \cdot |x_n - \bar{x}|$ desde que x_n já esteja suficientemente perto de 0.

Método das secantes



eq. reta

$$y = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

OBS

$$0 = \left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right) \cdot (x_2 - x_0) + f(x_0)$$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$x_{n+1} = \phi_{sec}(x_n, x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Sistemas Lineares

Dada $A_{n \times n}$ matriz e $b_{n \times 1}$, queremos encontrar $x_{n \times 1}$, tal que:

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

→ Método de Escalonamento ou Eliminação de Gauss

Dado:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \end{cases}$$

Queremos obter um outro sistema da forma:

$$\begin{cases} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 = b'_1 \\ a'_{22} \cdot x_2 + a'_{23} x_3 = b'_2 \\ a'_{33} x_3 = b'_3 \end{cases}$$

tal que ambos tenham a mesma solução. Isto porque resolver o segundo é muito fácil

OBS

Exemplo Resolva o sist. linear abaixo por escalonamento.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 20 \\ 6x - 9y + 12z = 51 \\ -5x \quad\quad + 2z = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 2 & -5 & 2 & 11 \\ -5/3 & -10/3 & 31/3 & 103/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 2 & -5 & 2 & 11 \\ -5/3 & 2/3 & 9 & 27 \end{array}\right) \sim$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, -1, 3)$$

Teorema

Dado $A_{n \times n}$, se a escalonamos, obtemos B

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & a_{22} & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{33} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \quad a_{nn} \end{pmatrix}$$

então $\det(A) = -1 \cdot \det(B) = (-1)^{n^\circ \text{ trocas}} \cdot a'_{11} \cdot a'_{22} \cdots a'_{nn}$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{a} & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = ad - cb$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - c/a \cdot b \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = ad - cb$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b - a/c \cdot d \end{pmatrix} \Rightarrow \det = cb - ad = -\det(A)$$

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 52x_3 = 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 = 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 38 \end{cases}$$

solução exata: $(1, 1, 1)$

Resolvemos o sistema acima pelo método de Eliminação de Gauss com 3 alg. significativos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & 3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 2 & -1400 & -1410 \\ 22 & -26 & -1130 & -1210 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 2 & -1400 & -1410 \\ 22 & -26 & -61300 & -61800 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1{,}01 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1{,}45 \end{array}$$

Condensação Pivotal

É um critério que em geral nos dá soluções mais próximas da solução exata e consiste simplesmente em trocar as linhas para ter os maiores pivôs possíveis (em valor absoluto).

Ex: Resolva por escalonamento com condensação pivotal o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -9x + y = -8 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -9 & 1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -9 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -9 & 1 & -8 \\ -0{,}1111 & 1{,}11 & 2{,}11 \end{array}\right) \Rightarrow y = \frac{2{,}11}{1{,}11} = 1{,}9$$

$$x = -1{,}1$$

OBS

5ª semana

Numérico

Refinamento de Solução

No exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 52 \\ 27 & 110 & -3 \\ 22 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 134 \\ 38 \end{pmatrix}$

usando o critério de Condensamento Pivotal, após escalonarmos, ficamos com (3 algarismos significativos):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0{,}815 & -87{,}7 & 16{,}5 & -71 \\ 0{,}037 & 0{,}000798 & 52{,}1 & 52{,}1 \end{array}\right)$$

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

$x_3 = \dfrac{52{,}1}{52{,}1} = 1 \qquad x_2 = \dfrac{-71 - 16{,}5 \times 1}{-87{,}7} = 0{,}998$

$x_1 = \dfrac{134 + 3.1 - 110.0{,}998}{27} = 1$

⇒ Como, após resolver um sistema por escalonamento, podemos refinar a solução?

Queremos resolver $A.x = b$, por escalonamento, fazendo as contas com m algarismos significativos e depois refinar a solução. Como fazer isso?

Suponha que a solução exata de $Ax = b$, seja a solução denotada por $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ seja a solução obtida por escalonamento.

1) Resíduo $= b - A.\tilde{x}$

(faça as contas com precisão dupla)

Converta resíduo para precisão simples.

OBS

2) $A \cdot \underset{\text{erro}}{e} = \text{resíduo} = b - A\cdot\tilde{x}$ (precisão simples)

$A \cdot e = b - A\tilde{x}$

$A\,(\tilde{x} + e) = b$

solução refinada $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + e$

$\text{resíduo}^{(1)} = b - A\tilde{\tilde{x}}$

→ Façamos uma etapa do ref. de solução para o sistema anterior:

$$\text{resíduo} = \begin{pmatrix} 57 \\ 134 \\ 38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 52 \\ 27 & 110 & -3 \\ 22 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}998 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \cdot 0{,}998 \\ 110 - 110 \cdot 0{,}998 \\ 2 - 2 \cdot 0{,}998 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 3{,}992 \\ 110 - 109{,}78 \\ 2 - 1{,}996 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}008 \\ 0{,}22 \\ 0{,}004 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0{,}008 \\ 0{,}22 \\ 0{,}004 \end{pmatrix}$$

converta para precisão simples

$A \cdot e = r$

Após escalonarmos este sistema, obtemos

$\underbrace{A'}_{\uparrow} \cdot e = \underbrace{r'}_{?}$

Para achar r', aplicamos em r, todas as equações feitas para escalonar A.

OBS.

$$r = \begin{pmatrix} 0{,}008 \\ 0{,}22 \\ 0{,}004 \end{pmatrix} \overset{p_1=2}{\sim} \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ 0{,}008 \\ 0{,}004 \end{pmatrix} \overset{p_2=2}{\sim} \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ 0{,}004 \\ 0{,}008 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ 0{,}004 - 0{,}815 \cdot 0{,}22 \\ 0{,}008 - 0{,}037 \cdot 0{,}22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ -0{,}175 \\ -0{,}00014 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ -0{,}175 \\ -0{,}00014 - 0{,}000798 \cdot (-0{,}175) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ -0{,}175 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora, ache e:

$$e_3 = \frac{0}{52{,}1} = 0 \qquad e_2 = \frac{-0{,}175 - 16{,}5 \cdot 0}{-87{,}5} = 0{,}002$$

$$e_1 = \frac{0{,}22 + 3 \cdot 0 - 110 \cdot 0{,}002}{27} = 0$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + e = (1, 1, 1) = \bar{x} \quad !!$$

↳ correção

(Em geral não acontece)

Sistemas Mal condicionados

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}98 \cdot x_2 = 4{,}95 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \quad *$$

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}99 \cdot x_2 = 4{,}95 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Cálculo da Matriz Inversa

$$A_{3\times3} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

OBS

Exemplo

Calcule a inversa de: (contas com 3 alg. sig.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}667 & -3{,}67 & 0{,}33 & 1 & -0{,}667 & 0 \\ 1 & -6 & 6 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$p_1 = 2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 6 & 0 & -1 & 1 \\ 0{,}667 & 0{,}612 & -3{,}34 & 1 & -0{,}055 & -0{,}612 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3$

Resolva uma por vez e ache as colunas de A^{-1}

$$g = \frac{-1}{3{,}34} \qquad i = \frac{-0{,}612}{-3{,}34}$$

Método L.U.

Suponha que queremos resolver $A_{n \times n} \cdot x = b_{n \times 1}$ e sabemos que

$A_{n \times n} = L_{n \times n} \cdot U_{n \times n}$, onde

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$(L.U) \cdot x = b$

$L.(\underbrace{Ux}_{y}) = b$ $\qquad U.x = y$

↳ tire o x por substituição

$L.y = b$

↳ resolvemos trivialmente pois a resolução é como para matriz escalonada.

OBS

Continuando:

Decomposição L.U. (= mét.)

$$A_{n\times n} = L_{n\times n} \cdot U_{n\times n}$$

matriz qualquer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 \\ \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

$$L \cdot \overbrace{(U \cdot x)}^{n\times 1} = b$$

descobri

Inicialmente, vamos descobri o valor de $U \cdot x \overset{def.}{=} y$.

$$L \cdot y = b$$

sai daqui, com o mesmo custo da resolução de um sistema com uma matriz escalonada

Agora ache x tal que

$U \cdot x = y$ ← já temos do passo anterior

mesmo custo de antes, de resolver um sistema com matriz escalonada

Agora, vamos entender de que forma podemos obter a decomposição L.U.:

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS

O que ocorre normalmente é que dada uma matriz A que pode ser escalonada sem que seja necessário trocar linhas, então, se, ao escalonarmos A, obtemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ m_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então vale o seguinte:

$$\left(\text{Dado: } (m) \cdot (m) \cdot (m) \cdots (A) = (\quad) \right)$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ m_{n1} & \dots & & & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

Exemplo

Ache a decomposição L.U. da matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

OBS:

O que ocorre normalmente é que dada uma matriz A que pode ser escalonada sem que seja necessário trocar linhas então, se, ao escalonarmos A obtemos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ m_{21} & m_{32} & & \\ m_{31} & m_{32} & m_{n-1\,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então vale o seguinte:

$$\text{Dado} \quad (m) \cdot (m) \cdots (A) = (\quad)$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ m_{n1} & \cdots & & 1 & \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

Exemplo

Ache a decomposição L.U da matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

6ª semana

Numérico

Método Iterativo para resolver Sistemas Lineares

A ideia agora é, ao tentar resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

i é índice não potência!

encontrar uma sequência de pontos $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \in \mathbb{R}$ tal que $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \xrightarrow{i \to \infty}$ solução exata do sistema.

Como fazer?

→ Método de Jacobi

Suponha que o sistema satisfaça:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

→ $a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{troca de linhas}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

não satisfaz satisfaz

Tiramos x_i da equação i em função das outras variáveis:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\cdot x_1^k - a_{23}\cdot x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k\right) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}\cdot x_2^k - \dots - a_{nn-1}\cdot x_{n-1}^k\right) \end{cases}$$

Chute $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ e ache $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ com a receita acima. Depois, repita, repita, ...

Exemplo Faça 1 interação do Método de Jacobi no sistema abaixo, começando em $(x^0, y^0, z^0) = (0,1,0)$ ← chute

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Sol:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \frac{1}{2}\left(0 - 3y^k + 5z^k\right) \rightarrow x^1 = -3/2 \\ y^{k+1} = \frac{1}{1}\left(3 - 1x^k - 1z^k\right) \rightarrow y^1 = 3 \\ z^{k+1} = \frac{1}{1}\left(2 - 2x^k + 1y^k\right) \rightarrow z^1 = 3 \end{cases}$$

$\rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(0 - 3.3 + 5.3) \rightarrow x^2 = 3$

$\rightarrow y^2 = 1\left(3 - 1(-3/2) - 1.3\right) \rightarrow y^2 = 3/2$

$\rightarrow z^2 = 1\left(2 - 2(-3/2) + 1.3\right) \rightarrow z^2 = 8$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{chute}}}{(x^0, y^0, z^0)} \rightarrow (x^1, y^1, z^1) \rightarrow (x^2, y^2, z^2) \rightarrow \dots \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

→ Método de Gauss-Seidel

Suponha o sistema que satisfaz

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}\cdot x_n = b_2 \end{cases}$$

$a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$

Tiramos x_i da equação, em função de outras variáveis

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\cdot x_2^k - a_{13}\cdot x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k\right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\cdot x_1^{k+1} - a_{23}\cdot x_3^k - \dots - a_{2n}\cdot x_n^k\right) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}\cdot x_1^{k+1} - a_{n2}\cdot x_2^{k+1} - \dots - a_{nn-1}\cdot x_{n-1}^{k+1}\right) \end{cases}$$

└ menor custo computacional

→ Critério de Convergência para Método G-S

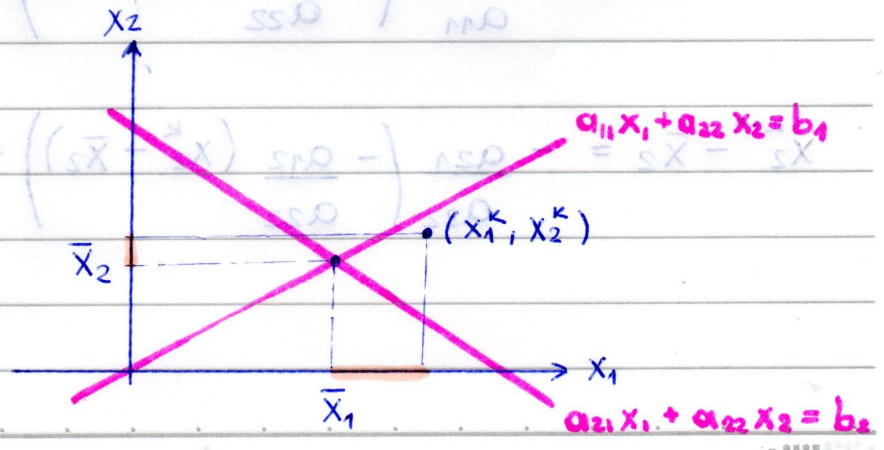
Olhemos inicialmente para o caso de sistemas 2x2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Seja $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ a solução exata do sistema anterior, queremos estimar:

$|x_1^k - \bar{x}_1| = ?$

$|x_2^k - \bar{x}_2| = ?$



G.S. $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} \cdot x_2^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \cdot x_1^{k+1}) \end{cases}$

Como $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é a solução exata, vale:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 1/a_{11} (b_1 - a_{12} \cdot \bar{x}_2) \\ \bar{x}_2 &= 1/a_{22} (b_2 - a_{21} \cdot \bar{x}_1) \end{aligned}} \longleftrightarrow \begin{cases} a_{11} \bar{x}_1 + a_{12} \bar{x}_2 = b_1 \\ a_{21} \bar{x}_1 + a_{22} \bar{x}_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\therefore \; x_1^{k+1} - \bar{x}_1 = 1/a_{11} (b_1 - a_{12} x_2^k) - 1/a_{11} (b_1 - a_{12} \bar{x}_2)$$

$$\downarrow$$

$$x_1^{k+1} - \bar{x}_1 = \boxed{-\frac{a_{12}}{a_{11}} (x_2^k - \bar{x}_2)}$$

$$x_2^{k+1} - \bar{x}_2 = 1/a_{22} (b_2 - a_{21} x_1^{k+1}) - 1/a_{22} (b_2 - a_{22} \bar{x}_1)$$

$$\downarrow$$

$$x_2^{k+1} - \bar{x}_2 = \boxed{-\frac{a_{22}}{a_{21}} (x_1^{k+1} - \bar{x}_1)}$$

$$\hookrightarrow \; x_2^k - \bar{x}_2 = -\frac{a_{22}}{a_{21}} (x_1^k - \bar{x}_1)$$

→ Como as expressões anteriores valem para todo $k \geq 0$:

$$x_1^{k+1} - \bar{x}_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{22}} (x_1^k - \bar{x}_1) \right) = \boxed{\frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}} (x_1^k - \bar{x}_1)}$$

$$x_2^{k+1} - \bar{x}_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \left(-\frac{a_{12}}{a_{22}} (x_2^k - \bar{x}_2) \right) = \boxed{\frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} (x_2^k - \bar{x}_2)}$$

$$|x_1^{k+1} - \bar{x}_1| = \left|\frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}}\right| \cdot |x_1^{k} - \bar{x}_1|$$

$$|x_2^{k+1} - \bar{x}_2| = \left|\frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}}\right| \cdot |x_2^{k} - \bar{x}_2|$$

$$|x_1^{k+1} - \bar{x}_1| = \left|\frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}}\right|^{k+1} \cdot \overbrace{|x_1^{0} - \bar{x}_1|}^{\text{número fixo}} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$|x_2^{k+1} - \bar{x}_2| = \left|\frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}}\right|^{k+1} \cdot |x_2^{0} - \bar{x}_2| \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad (*)$$

POTÊNCIAS!

(*) <u>SE</u> e <u>somente</u> se

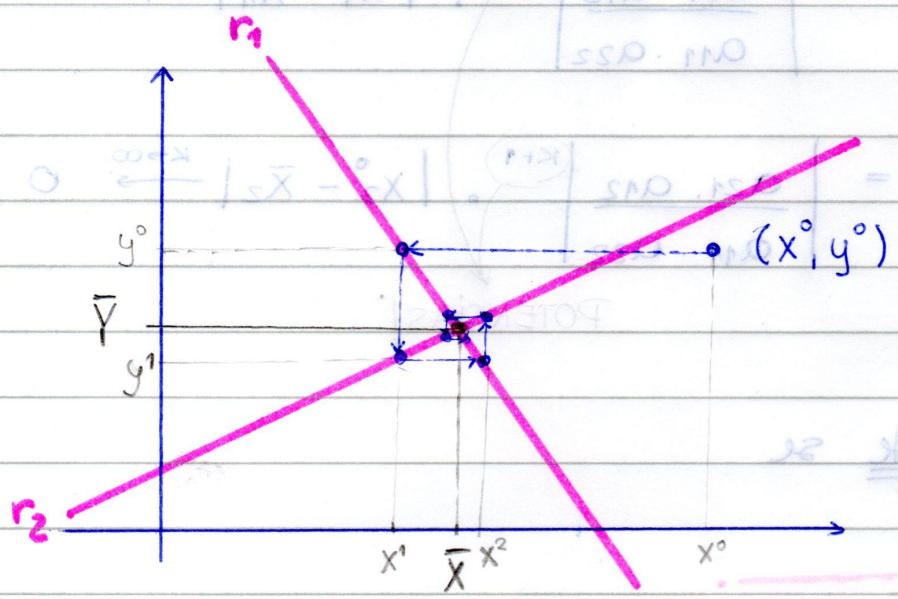
$$\boxed{\left|\frac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22}}\right| < 1}$$

→ Interpretação geométrica no caso 2x2

$$\begin{cases} r_1 \rightarrow & 3x + y = 6 \\ r_2 \rightarrow & 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

Com $x^0 \rightarrow y^1$

Com $y^1 \rightarrow \ldots$



Caso - geral - Método de Gauss - Seidel

Dado um sist. linear:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{tal que } a_{ii} \neq 0, \text{ p/ } i = 1, 2, \dots, n$$

Queremos exibir condições para que, obtendo as aprox. como abaixo,

$$x_1^k = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{k-1} - a_{13} \cdot x_3^{k-1} - \dots - a_{1n} \cdot x_n^{k-1} \right)$$

$$\vdots$$

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - a_{i1} x_1^k - \dots - a_{i\,i-1} \cdot x_{i-1}^k - a_{i\,i+1} \cdot x_{i+1}^{k-1} - \dots - a_{in} \cdot x_n^{k-1} \right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^k = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1} x_1^k - \dots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1}^k \right)$$

As sequências

$$x_1^k \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}_1$$
$$x_2^k \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}_2$$
$$\vdots$$
$$x_n^k \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x}_n$$

$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$ é aprox. de $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$

solução exata do sistema

Teorema (critério de Sassenfeld)

Calcule os seguintes números:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}| \cdot \beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}| + \dots + |a_{2n}|}{|a_{22}|}$$

$$\vdots$$

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}| \cdot \beta_1 + |a_{i2}| \cdot \beta_2 + \dots + |a_{i\,i-1}| \cdot \beta_{i-1} + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

$$\beta_n = \frac{|a_{n1}|\,\beta_1 + |a_{n2}|\cdot\beta_2 + \dots + |a_{n,n-1}|\cdot\beta_{n-1}}{|a_{nn}|}$$

Então:

$$\boxed{|x_i^{k+1} - \bar{x}_i| \leq \beta_i \cdot \max|x_j^k - \bar{x}_j|}, \quad 1 \leq j \leq n$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Logo, se $\underbrace{\max_{1\leq i\leq n} \beta_i}_{M} < 1$, o método G-S converge!

Vejamos, porque "se $M<1$", então o método de G-S converge:

$$|x_i^{k+1} - \bar{x}_i| \leq M \cdot \max|x_j^k - \bar{x}_j| \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

$$a_{k+1} = \max_{(1\leq i\leq n)} |x_i^{k+1} - \bar{x}_n| \leq M \cdot \max|x_j^k - \bar{x}_j| \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$a_{k+1} \leq M \cdot a_k \quad , \quad a_k \geq 0$$

Como $M < 1$

$$a_{k+1} \leq M \cdot a_k \leq M \cdot M \cdot a_{k-1} \leq M \cdot M \cdot M \cdot a_{k-2} \leq \dots M^{k+1} \cdot a_0 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

porque $0 < M < 1$,

⇒ Prova (no caso $n = 3$):

Note que se $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ é a sol. exata do sistema,

sendo:

$\bar{x}_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\cdot\bar{x}_3)$, e analogamente para $\bar{x}_2$ e $\bar{x}_3$,

$$x_1^{k+1} - \bar{x}_1 = \frac{1}{a_{11}}(\cancel{b_1} - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k) - \frac{1}{a_{11}}(\cancel{b_1} - a_{12}\bar{x}_2 - a_{13}\bar{x}_3)$$

$$= \frac{-1}{a_{11}}\left(a_{12}(x_2^k - \bar{x}_2) + a_{13}\cdot(x_3^k - \bar{x}_3)\right)$$

Tomemos o módulo dos dois lados, notando que

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

$$|x_1^{k+1} - \bar{x}_1| \leq \frac{1}{|a_{11}|} \cdot \left(|a_{12}| \cdot \underbrace{|x_2^k - \bar{x}_2|}_{\leq \max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i - \bar{x}_i|} + |a_{13}| \cdot \underbrace{|x_3^k - \bar{x}_3|}_{\leq \max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i - \bar{x}_i|}\right) \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{|a_{11}|} (|a_{12}| \cdot |a_{13}|)}_{\beta_1} \cdot \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^k - \bar{x}_i|$$

para a segunda coordenada:

$$x_2^{k+1} - \bar{x}_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \cdot x_1^{k+1} - a_{23} \cdot x_3^k) - \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}\bar{x}_1 - a_{23}\bar{x}_3)$$

$$= \frac{-1}{a_{22}} \left(a_{21} (x_1^{k+1} - \bar{x}_1) + a_{23} (x_3^k - \bar{x}_3)\right)$$

→ tomando o módulo novamente

$$|x_2^{k+1} - \bar{x}_2| \leq \frac{1}{|a_{22}|} \cdot \left(|a_{22}| \cdot |x_1^{k+1} - \bar{x}_1| + |a_{23}| |x_3^k - \bar{x}_3|\right)$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{|a_{22}|} (|a_{21}| \cdot \beta_1 + |a_{23}|)}_{\beta_2} \cdot \max |x_i^k - \bar{x}_i|$$

Para a 3ª coordenada

$$x_3^{K+1} - \bar{x}_3 = \frac{1}{a_{33}} \left(b/3 - a_{31} . x_1^{K+1} - a_{32} . x_2^{K+1}\right)$$

$$- \frac{1}{a_{33}} \left(b/3 - a_{31} \bar{x}_1 - a_{32} . \bar{x}_2\right)$$

$$x_3^{K+1} - \bar{x}_3 = \frac{-1}{a_{33}} \left(a_{31} . (x_1^{K+1} - \bar{x}_1) + a_{32} . (x_2^{K+1} - \bar{x}_2)\right)$$

Mesmo de antes, tome $|\ |$ e aplique $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|x_3^{K+1} - \bar{x}_3| \leq \frac{1}{|a_{33}|} . \left(|a_{31}| . |x_1^{K+1} - \bar{x}_1| + |a_{32}| . |x_2^{K+1} - \bar{x}_2|\right)$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{|a_{33}|} \left(|a_{31}| . \beta_1 + |a_{32}| . \beta_2\right)}_{\beta_3} . \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^K - \bar{x}_i|$$

<u>Lema</u>: Suponha $M < 1$.

Da expressão

$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{K+1} - \bar{x}_i| \leq M . \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^K - \bar{x}_i|$, obtemos, de forma análoga ao caso de zero de função, que

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{K+1} - \bar{x}_i| \leq \frac{M}{1-M} . \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{K+1} - x_i^K|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

<u>Critério das Linhas</u>:

Se $|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots |a_{in}| < |a_{ii}|$

para $i = 1, \dots, n$,

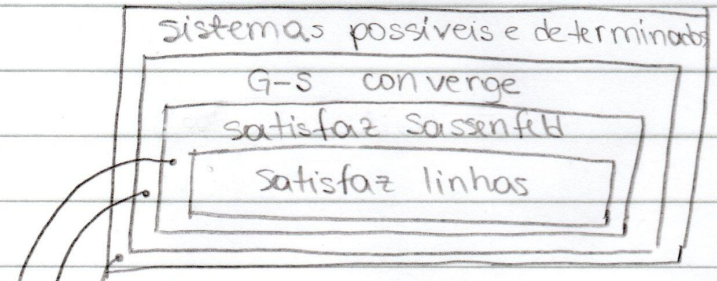
então $M < 1$ e portanto o método de G-S converge.

Prova:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} < 1 \checkmark$$

$$\beta_2 = \frac{|a_{21}| \cdot \beta_1 + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}|}{|a_{22}|} < 1 \checkmark$$

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}| \cdot \beta_1 + \dots + |a_{i\,i-1}| \cdot \beta_{i-1} + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|}{|a_{ii}|} < 1 \checkmark$$



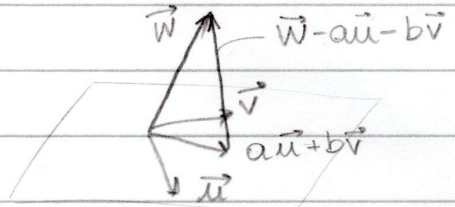
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 12y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \longrightarrow \beta_1 = 1/3 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{2 \cdot 1/3}{1} = 2/3 < 1$$

Método dos Mínimos Quadrados



L.I.

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$

$a\vec{u} + b\vec{v} - \vec{w}$ menor possível p/ $a\vec{u} + b\vec{v}$ aproximar $\vec{w}$.

O (a, b) que minimiza $F(a,b) = \|a\vec{u} + b\vec{v} - \vec{w}\|^2$ é tal que

$(\vec{w} - a\vec{u} - b\vec{v}) \perp \vec{u}$

" $\perp \vec{v}$

→ para achar a e b, basta:

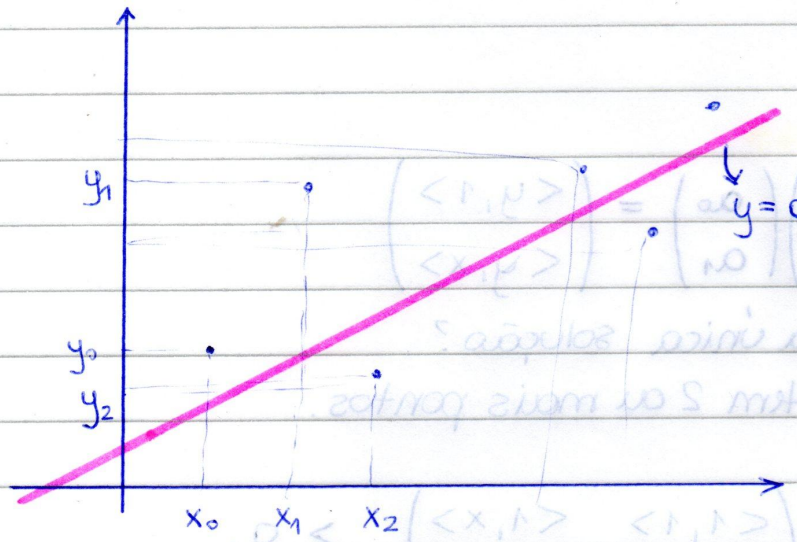
$$\begin{aligned}(\vec{w} - a\vec{u} - b\vec{v}).\vec{u} &= 0 \\ (\vec{w} - a\vec{u} - b\vec{v}).\vec{v} &= 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases}(\vec{u}.\vec{u}).a + (\vec{u}.\vec{v}).b = \vec{w}.\vec{u} \\ (\vec{u}.\vec{v}).a + (\vec{v}.\vec{v})b = \vec{w}.\vec{v}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0\end{cases}$$

7ª semana

Numérico

... continuando **Método dos Mínimos Quadrados**



Dado os pontos:

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$$\text{Erro}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - (a_0 + a_i . x_i))^2$$

pegamos o quadrado pois isso equivale:

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - (a_0 + a_i . x_i))^2 = \| \vec{y} - (a_0 . \vec{1} + a_1 . \vec{x}) \|$$

sendo: $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$

$\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)$

$\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

O par (a_0, a_1) que minimiza $\text{Erro}(a_0, a_1)$ é tal que:

$$(\vec{y} - a_0 . \vec{1} - a_1 . \vec{x}) \perp \vec{1}$$
$$(\vec{y} - a_0 . \vec{1} - a_1 . \vec{x}) \perp \vec{x}$$

$$\begin{cases} \langle \vec{1}, \vec{1} \rangle a_0 + \langle \vec{1}, \vec{x} \rangle a_1 = \langle \vec{y}, \vec{1} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{1} \rangle a_0 + \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle a_1 = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \end{cases}$$

Obs: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_i$

⇒ Olhemos para:

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,x \rangle \\ \langle x,1 \rangle & \langle x,x \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y,1 \rangle \\ \langle y,x \rangle \end{pmatrix}$$

Quando ele tem uma única solução?

R: Quando a tabela tem 2 ou mais pontos.

Mostremos que $\det \begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,x \rangle \\ \langle x,1 \rangle & \langle x,x \rangle \end{pmatrix} > 0$.

$\underbrace{\langle 1,1 \rangle}_{\|\vec{1}\|^2} \cdot \underbrace{\langle x,x \rangle}_{\|\vec{x}\|^2} - (\langle 1,x \rangle)^2$ (é sempre ≥ 0)

↳ isso só se anula se $\vec{1}$ e $\vec{x}$ forem paralelos

$\vec{1} = (1, \dots, 1)$ só são paralelos se $x_0 = x_1 = \dots = x_n$,

$\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ou seja, no caso de um só ponto.

→ ou seja, NÃO SÃO PARALELOS

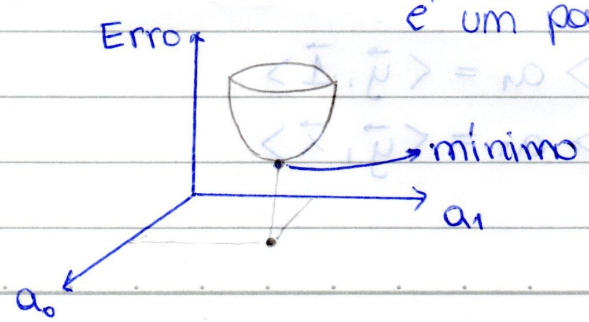
logo: $\langle \vec{1}, \vec{x} \rangle < \|\vec{1}\| \cdot \|\vec{x}\|$

e o det é maior que 0.

⇒ Olhemos ainda para Erro(a_0, a_1):

$$\text{Erro}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_i x_i)^2 \geq 0$$

é um parabolóide



→ esse mínimo é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Erro}{\partial a_0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Erro}{\partial a_1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Erro}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^{n} \cancel{2}(y_i - a_0 - a_i \cdot x_i)(+1) = 0/2$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} 1.1\right)}_{\langle 1,1\rangle} . a_0 + \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} 1.x_i\right)}_{\langle 1,x\rangle} . a_1 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} y_i . 1}_{\langle y,1\rangle}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Erro}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^{n} \cancel{2}(y_i - a_0 - a_i \cdot x_i).(+x_i) = 0/2$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} 1.x_i\right)}_{\langle 1,x\rangle} . a_0 + \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} x_i . x_i\right)}_{\langle x,x\rangle} . a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i . x_i}_{\langle y,x\rangle}$$

Exemplo: Ache a reta que melhor aproxima a tabela abaixo:

	x	y
0	1	2
1	2	4
2	3	6
3	4	20

Sol: $n = 3$

$\langle 1,1\rangle = 4$

$\langle 1,x\rangle = 10$

$\langle x,x\rangle = 30$

$\langle y,1\rangle = 32$

$\langle y,x\rangle = 108$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 108 \end{pmatrix}$$

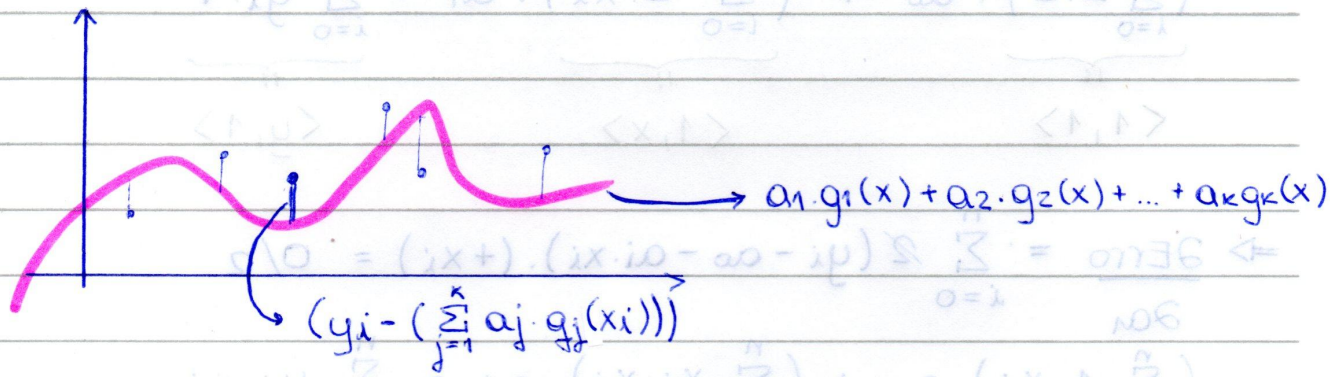
Caso geral do Método dos M.Q.

Dada uma tabela,

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

queremos aproximá-la por uma combinação linear de funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$, de forma a minimizar o erro quadrático.

Como fazer?

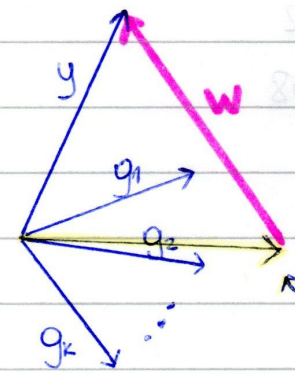


Queremos achar $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ tal que

$$\text{Erro}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum \left(y_i - \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot g_j(x_i)\right)\right)^2$$ seja o menor possível.

→ Interpretação geométrica

$\mathbb{R}^{n+1}$



$y = (y_0, \dots, y_n)$

$g_1 = (g_1(x_0), g_1(x_1), \dots, g_1(x_n))$

$g_2 = (g_2(x_0), g_2(x_1), \dots, g_2(x_n))$

$\vdots$

$g_k = (g_k(x_0), \dots, g_k(x_n))$

$a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_k g_k$

$\|w\|^2 = \text{Erro}(a_1, \dots, a_k)$

Assim, $a_1, a_2, \dots, a_k$, serão encontrados impondo que

$$y - a_1 g_1 - a_2 g_2 - \dots - a_k g_k \perp g_1$$
$$y - a_1 g_1 - a_2 g_2 - \dots - a_k g_k \perp g_2$$
$$\vdots$$
$$y - a_1 g_1 - a_2 g_2 - \dots - a_k g_k \perp g_k$$

ou seja:

$$\langle y - a_1 g_1 - a_2 g_2 - \dots - a_k g_k, g_1 \rangle = 0$$
$$\vdots$$
$$\langle y - a_1 g_1 - a_2 g_2 - \dots - a_k g_k, g_k \rangle = 0$$

e então:

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \dots & \langle g_1, g_k \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \dots & \langle g_2, g_k \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle g_k, g_1 \rangle & \langle g_k, g_2 \rangle & \dots & \langle g_k, g_k \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, g_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, g_k \rangle \end{pmatrix}$$

Sistema *

Sistema normal e ele também tem sempre uma única solução, desde que $n+1 \geq k$.

→ O mínimo do Erro satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Erro}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial Erro}{\partial a_k} = 0 \end{cases}$$

mínimo do erro = ponto crítico

→ Sistema *

$$\begin{cases} a_1 g_1(x_0) + a_2 g_2(x_0) + \dots + a_k g_k(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ a_1 g_1(x_n) + a_2 g_2(x_n) + \dots + a_k g_k(x_n) = y_n \end{cases}$$

↳ $n \gg k$, em geral o sistema é impossível

$$a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} g_1(x_0) \\ \vdots \\ g_1(x_n) \end{pmatrix}}_{g_1} + a_2 \underbrace{\begin{pmatrix} g_2(x_0) \\ \vdots \\ g_2(x_n) \end{pmatrix}}_{g_2} + \dots + a_k \underbrace{\begin{pmatrix} g_k(x_0) \\ \vdots \\ g_k(x_n) \end{pmatrix}}_{g_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}$$

vetor em $\mathbb{R}^{n+1}$

Temos que achar $a_1, a_2, \dots, a_k$ de forma que $y - a_1 g_1 - \dots - a_k g_k$ seja ortogonal ao subespaço vetorial gerado por $g_1, g_2, \dots, g_k$, porque assim a norma de $y - (a_1 g_1 + \dots + a_k g_k) = \sqrt{Erro(a_1, \dots, a_k)}$ será a menor possível.

↳ $\langle (y - a_1 g_1 - \dots - a_k g_k), g_i \rangle = 0$, p/ $i \in \{1, \dots, k\}$

↳ PRIMEIRO SISTEMA *

Exemplo Aproxime os pontos por um polinômio de grau ≤ 2 pelo MMQ.

x	y
1	1
2	4
3	10
5	21

Sol: $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$

$$y \sim a_1 . 1 + a_2 . x + a_3 . x^2$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Sabe-se que $a_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle$, e portanto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 11 & 39 \\ 11 & 39 & 161 \\ 39 & 161 & 723 \end{pmatrix}}_{a} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 144 \\ 632 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \langle y, g_1 \rangle \\ \to \langle y, g_2 \rangle \\ \to \langle y, g_3 \rangle \end{array}$$

- $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$ sistema impossível

$$x . \underset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + y . \underset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}} = \underset{w}{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

Podemos então resolver um sist. impossível como o anterior achando a projeção ortogonal de $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ em $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$

$$\begin{pmatrix} u.u & u.v \\ v.u & v.v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w.u \\ w.v \end{pmatrix}$$

Numerico
Aula de Exercícios

→ Exercícios de zeros de funções

- lista:

3) $p \in \mathbb{N}^*$

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

a) Mostre que a sequência acima pode ser utilizada para calcular $\sqrt[p]{a}$, $a \geq 0$.

Temos que mostrar que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[p]{a}$

Tentemos ver se $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, p/ alguma Φ.

Note que Φ é dada por

$$\Phi(x) = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{(p-1)}}\right)$$

Precisamos achar onde começar, ou seja, quem é x_0.

→ Vejamos se Φ satisfaz as hipóteses do Teorema de Converg

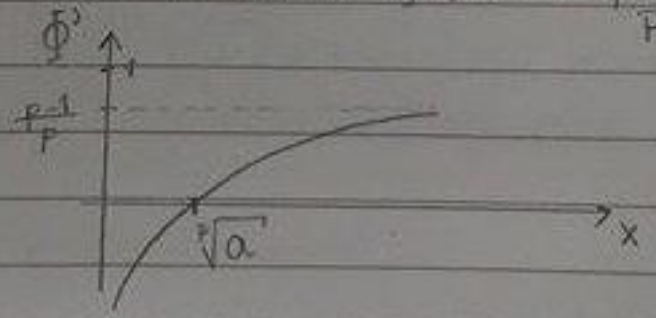
- $\Phi(\sqrt[p]{a}) = \frac{1}{p}\left((p-1)\sqrt[p]{a} + \frac{a^{p/p}}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}\right) = \frac{1}{p}\left((p-1)\sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{a}\right) =$

$\Phi(\sqrt[p]{a}) = \sqrt[p]{a}$, portanto $\sqrt[p]{a}$ é ponto fixo (cruza $y=x$)

- $\Phi'(x) = \frac{1}{p}\left((p-1) - (p-1)\cdot\frac{a}{x^p}\right) = \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right)$

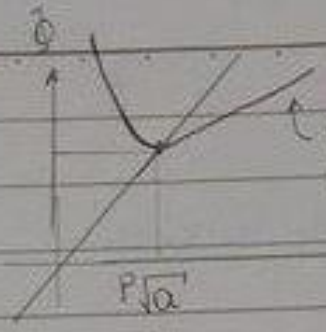
→ $\sqrt[p]{a}$ é a raiz de $\Phi'(x)$

→ $x \to \infty$: $\Phi'(x) \to \frac{p-1}{p}$ e $x \to 0^+$



Além disso, se igualarmos $\Phi(x) = x$ vemos que só existe a raiz $\sqrt[p]{a}$

∴ Φ tem a cara:



vai se distanciando da diagonal, ~~pois sempre tem $\Phi' < 1$~~ (outro motivo de porque Φ só tem 1 raiz)

→ Se quisessemos simplesmente aplicar o teorema, teríamos, para cada a e p, achar I, intervalo que contém $\sqrt[p]{a}$, tal que $|\Phi'(x)| < 1$ em I e x_0 deveria ser o extremo de I mais perto de $\sqrt[p]{a}$ (**)

*) Mostre que $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}} = 2$

$\Phi(x) = \sqrt{2+x}$

$x_0 = \sqrt{2}$

$x_{n+1} = \Phi(x_n)$

$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$

$T: x_n \to 2$

$\cdot\ \Phi(x) = x \to \sqrt{2+x} = x$

↳ $x^2 - x - 2 = 0$

↳ $x = -1$ ou 2

↳ não é

(**) continuação

$\frac{p-1}{p} \geq \Phi'(x) \geq 0, \ \forall x \geq \sqrt[p]{a}$

Logo, começando pela direita de $\sqrt[p]{a}$, temos convergência monótona para $\sqrt[p]{a}$. E se começarmos pela esquerda de $\sqrt[p]{a}$, o primeiro iterado estará a direita, pois se $x < \sqrt[p]{a}$, $\Phi(x) > \Phi(\sqrt[p]{a}) = \sqrt[p]{a}$, logo $\forall x_0$, serve

- continuando a lista

19) $V \rightarrow$ preço a vista

a) $2V$ em 10 vezes sem acréscimo, começando 1 mês depois

Cada prestação é $V/5$.

• No banco: 1 real da r reais $(r>1)$

V é o que tenho.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{\left(V.r-\frac{V}{5}\right)}_{\text{após 1 mês}}.r-\frac{V}{5}\right)}_{\text{após 2 meses}}.r-\frac{V}{5}\right)}_{\text{após 3 meses}}.r-\frac{V}{5}\right)}_{\text{após 4 meses}}$$

$$V.r^4-\frac{V}{5}.r^3-\frac{V}{5}.r^2-\frac{V}{5}.r-\frac{V}{5} \rightarrow 4 \text{ meses}$$

• Após 10 meses

$$V.r^{10}-\frac{V}{5}(r^9+r^8+r^7+r^6+r^5+r^4+r^3+r^2+r^1+1)$$

$$S=1+\ldots+r^9$$

$$r.S=S-1+r^{10}$$

$$S=\frac{r^{10}-1}{r-1}$$

$\therefore$ Após 10 meses: $V.\left(r^{10}-\frac{1}{5}\left(\frac{r^{10}-1}{r-1}\right)\right)=0$ é o que ele quer

$$r^{10}-\frac{1}{5}\left(\frac{r^{10}-1}{r-1}\right)=0$$

$$5(r-1)r^{10}-r^{10}+1=0$$

$$5r^{11}-6r^{10}+1=0$$

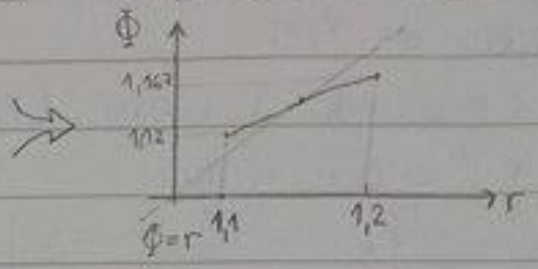
$$5r.r^{10}=6r^{10}-1 \longrightarrow r=\frac{1}{5}\left(6-\frac{1}{r^{10}}\right)$$

b) Mostremos que

$$\Phi(r) = \frac{\left(6 - 1/r^{10}\right)}{5}$$ tem ponto fixo entre 1,1 e 1,2.

$\Phi(1{,}1) = 1{,}12\ldots$

$\Phi(1{,}2) = 1{,}1677\ldots$



$$\Phi'(r) = \frac{2}{r^{11}}$$

$|\Phi'(r)| < 0{,}8 \quad , \forall r \in [1{,}1 , 1{,}2]$

x_0 pode ser $\forall$ ponto de $[1{,}1, 1{,}2]$ porque $\Phi'(r) > 0 \Rightarrow$ conv. monótona

- lista de Sistemas Lineares

2)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

a) $\tilde{x}$ aprox. de solução

b) $r = b - A.\tilde{x}$

$$\beta_1 = \frac{|1| + |6|}{|2|} > 1$$

$\therefore$ não satisfaz Sassenfeld

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

$4 > 2 + 1$ ✓

$5 > 1 + 2$ ✓

$6 > 2 + 1$ ✓

Satisfaz crit. das Linhas

$\downarrow$

Satisfaz Sassenfeld

$\downarrow$

Resolução por G.S. converge

d) $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sabendo que $|\bar{x}_1| \leq 2$, $|\bar{x}_2| \leq 2$ e $|\bar{x}_3| \leq 2$, det. um número de iterações para que tenhamos erro com respeito a solução exata $\leq 0{,}01$.

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{k+1} - \bar{x}_i| \leq M \cdot \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^k - \bar{x}_i|$$

$$\leq \ldots M^{k+1} \cdot \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^0 - \bar{x}_i| \leq 2$$

$M = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 3/4$

$\beta_1 = 3/4$

$\beta_2 = \dfrac{3/4 + 2}{5} = \dfrac{11}{20}$

$\beta_3 = \dfrac{30/20 + 11/20}{6} = \dfrac{41}{120}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 2 \leq 10^{-2}$

$\downarrow$

$n \geq \ldots$

*2) A partir dos dados abaixo, estime qual a aceleração da gravidade, usando um peso no produto interno, inversamente proporcional à variância das medidas.

t	V_1	V_2	V_3	V_4	V_m	W (função peso)
1	10	11	10	5	9	W_1
2	20	19	22	23	21	W_2
3	30	32	24	45	32,76	W_3
5	50	53	80	106	72,25	W_4

$V_m \sim V_0 \cdot 1 + g \cdot t$

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,t \rangle \\ \langle t,1 \rangle & \langle t,t \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle V_m, 1 \rangle \\ \langle V_m, t \rangle \end{pmatrix}$$

/ /

$$\langle 1, t \rangle = \sum_{i=1}^{4} 1(t_i) \cdot t(t_i) \cdot W(t_i)$$

$$= 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 3 w_3 + 5 \cdot w_4$$

$$\langle t, t \rangle = 1 \cdot w_1 + 4 w_2 + 9 w_3 + 25 w_4$$

$$\langle v_m, 1 \rangle = 9 \cdot w_1 + 21 w_2 + 32{,}76 \cdot w_3 + 72{,}25 w_4$$