# MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

## Prova 2 - 14/10/2010 - Duração: 2 horas

**Questão 1** (2.5 pontos) O sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

é levado no sistema equivalente (com os multiplicadores abaixo da diagonal)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 3.5 \\ 0.5 & 3.5 & 0.5 & 2.2 \\ 0.25 & 0.21 & 3.7 & 3.6 \end{array}\right)$$

ao usarmos o método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e 2 algarismos significativos, onde na primeira etapa trocou-se a linha 1 com a linha 3 ($p_1 = 3$) e na segunda etapa trocou-se a linha 2 com a linha 3 ($p_2 = 3$). Obtenha a solução do sistema (usando 2 algarismos significativos). Partindo de $x = (0.5, 0.49, 0.97)$, faça uma etapa de refinamento.

**Questão 2** (2.5 pontos) Os sistemas lineares

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são equivalentes. Deseja-se aproximar a solução pelo método de Gauss-Seidel. Escolha, justifcando, qual deles é mais adequado. Para o sistema escolhido, calcule uma iteração partindo de $(0, 0, 0)$ e estime o número mínimo de iterações para se garantir um erro menor do que 0.0001.

**Questão 3** (2.5 pontos) A tabela

| $r$ | 2.70 | 2.00 | 1.61 | 1.20 | 1.02 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | $48^o$ | $67^o$ | $83^o$ | $108^o$ | $126^o$ |

foi gerada a partir de medidas da posição de um cometa em coordenadas polares convenientes. Sabendo-se que a órbita do cometa é descrita pela lei de Kepler

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

estime $p$ e $e$ usando mínimos quadrados.

**Questão 4** (2.5 pontos) Um polinômio mônico de grau 3 é um polinômio da forma $p(x) = x^3 + p_2(x)$, onde $p_2$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2. Mostre que dentre os polinômios mônicos de grau 3, $p(x) = x^3 - 2.4x$ é o de menor norma, sendo a norma de um polinômio dada por $||p(x)|| = (\int_{-2}^{2} p^2(x)\, dx)^{\frac{1}{2}}$.

MAP2121 - P2 2010

Q1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 3,5 \\ 0,5 & 3,5 & 0,5 & 2,2 \\ 0,25 & 0,21 & 3,7 & 3,6 \end{array}\right)$

$p_1 = 3 \ , \ p_2 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} 3,7x_3 = 3,6 \Rightarrow x_3 = 0,97 \\ 3,5x_2 + 0,5x_3 = 2,2 \Rightarrow x_2 = 0,49 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 3,5 \Rightarrow x_1 = 0,50 \end{array}\right\} \Rightarrow x = (0,5; 0,49; 0,97)$$

(4 s.s.) (4

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,49 \\ 0,97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,93 \\ 4,87 \\ 3,46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0, \\ 0, \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,13 \\ 0,04 \end{pmatrix} \xrightarrow{p_1 = 3} \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,13 \\ 0,07 \end{pmatrix} \xrightarrow{p_2 = 3} \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,07 \\ 0,12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-0,5)\ (-0,25)} \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,05 \\ 0,12 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema $Ac^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0,04 \\ 0,5 & 3,5 & 0,5 & 0,05 \\ 0,25 & 0,21 & 3,7 & 0,11 \end{array}\right)$$

$3,7c_3 = 0,11 \Rightarrow c_3 = 0,030$

$\Rightarrow 3,5c_2 + 0,5c_3 = 0,05 \Rightarrow c_2 = 0,035 \Rightarrow$

$4c_1 + c_2 + c_3 = 0,04 \Rightarrow c_1 = -0,0063$

$x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)} \Rightarrow x^{(1)} = (0,49; 0,53; 1,0)$

$\langle r, 1 \rangle = 8,53$

$\langle r, r\cos\theta \rangle = 5,71$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1, r\cos\theta \rangle \\ \langle r\cos\theta, 1 \rangle & \langle r\cos\theta, r\cos\theta \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle r, 1 \rangle \\ \langle r, r\cos\theta \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1,82 \\ 1,82 & 4,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,53 \\ 5,71 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1,82 & 8,53 \\ 1,82 & 4,42 & 5,71 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1,82 & 8,53 \\ 0,364 & 3,76 & 2,61 \end{array}\right] \Rightarrow e = 0,69 \quad ; \quad p = 1,45$$

Portanto as estimativas para $p$ e $e$ são, respectivamente: 1,45 e 0,69.

$r = \frac{p}{\ldots} \Rightarrow r = p +$

MAP2121 - P2 2010

Q2)

Sistema 1: $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sistema 2: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como $M_2 < M_1$ a convergência do segundo s

dessa forma, ele é mais adequado para se utiliza

$z_{k+1} = 2 + y$

Pelo critério de Sassenfeld temos:

$$\beta_1 = \frac{4}{5} \qquad \beta_2 = \frac{\frac{4}{5}+2}{3} = \frac{14}{15} \qquad \beta_3 = \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{30}$$

$$M_1 = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \frac{14}{15}$$

Pelo critério de Sassenfeld temos:

$$\beta_1 = \frac{1}{4} \qquad \beta_2 = \frac{\frac{2}{4}+1}{3} = \frac{1}{2} \qquad \beta_3 = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}}{5} = \frac{7}{20}$$

$$M_2 = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \frac{1}{2}$$

do sistema é melhor do que o do primeiro,

tilizar com Gauss-Seidel.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

Como $M_2 < M_1$ a convergência do segundo sis
dessa forma, ele é mais adequado para se utilizar

$$\begin{cases} z_{k+1} = \dfrac{2 + y_k}{4} \\ y_{k+1} = \dfrac{2z_{k+1} + x_k}{3} \\ x_{k+1} = \dfrac{1 + z_{k+1} + 3y_{k+1}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{2+0}{4} = \dfrac{1}{2} \\ y_1 = \dfrac{2 \cdot 0{,}5 + 0}{3} = \dfrac{1}{3} \\ x_1 = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3}}{5} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$M_2^n < 10^{-4} \Rightarrow 0{,}5^n < 10^{-4} \Rightarrow n \cdot \log 0{,}5 < -4 \Rightarrow n \cdot 0{,}3 >$

Portanto o número de iterações mínimo uti

Como $M_2 < M_1$ a convergência do segundo sistema é melhor do que a do pr
dessa forma, ele é mais adequado para se utilizar com Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} z_{k+1} = \dfrac{2 + y_k}{4} \\ y_{k+1} = \dfrac{2z_{k+1} + x_k}{3} \\ x_{k+1} = \dfrac{1 + z_{k+1} + 3y_{k+1}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{2+0}{4} = \dfrac{1}{2} \\ y_1 = \dfrac{2.0,5+0}{3} = \dfrac{1}{3} \\ x_1 = \dfrac{1+\frac{1}{2}+3.\frac{1}{3}}{5} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$M_2^n < 10^{-4} \Rightarrow 0,5^n < 10^{-4} \Rightarrow n.\log 0,5 < -4 \Rightarrow n.0,3 > 4 \Rightarrow n > 13,3$

Portanto o número de iterações mínimo estimado é 14

MAP 2121 - P2 2010

Q3)

| $r$ | 2,70 | 2,00 | 1,61 | 1,20 | 1,02 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | 48° | 67° | 83° | 108° | 126° |

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \Rightarrow r = p + er\cos\theta$$

$$r \overset{mmq}{\sim} p + er\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} 2,70 \\ 2,00 \\ 1,61 \\ 1,20 \\ 1,02 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 1,81 \\ 0,78 \\ 0,20 \\ -0,37 \\ -0,60 \end{bmatrix}$$

$\langle 1, 1 \rangle = 5$

$\langle 1, r\cos\theta \rangle = \langle r\cos\theta, 1 \rangle = 1,82$

$\langle r\cos\theta, r\cos\theta \rangle = 4,42$

$\langle r, 1 \rangle = 8,53$

$\langle r, r\cos\theta \rangle = 5,71$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1, r\cos\theta \rangle \\ \langle r\cos\theta, 1 \rangle & \langle r\cos\theta, r\cos\theta \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle r, 1 \rangle \\ \langle r, r\cos\theta \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1,82 \\ 1,82 & 4,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,53 \\ 5,71 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1,82 & 8,53 \\ 1,82 & 4,42 & 5,71 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1,82 & 8,53 \\ \boxed{0,364} & 3,76 & 2,61 \end{array}\right] \Rightarrow e = 0,69 \quad ; \quad p = 1,45$$

Portanto as estimativas para $\underline{p}$ e $\underline{e}$ são, respectivamente: 1,45 e 0,69.

MAP2121 - P2 2010

Q4) Como queremos encontrar o polinômio mônico de menor norma, isso é o eq
a procurar a projeção ortogonal de $x^3$ sobre $p_2(x)$, tendo como produto i
$\langle f, g\rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\,dx$, dessa forma, pode montar o sistema normal:

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x^3,1\rangle \\ \langle x^3,x\rangle \\ \langle x^3,x^2\rangle \end{bmatrix}$$

, ou seja: $x^3 \sim a + bx + cx^2$

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-2}^{2} 1.dx = 2-(-2) = 4$$

$\langle x,1\rangle = \langle 1,x\rangle = \langle x,x^2\rangle = \langle x^2,x\rangle = \langle x^3,1\rangle = \langle x^3,x^2\rangle = 0$ (funções ímpar

$$\langle 1,x^2\rangle = \langle x^2,1\rangle = \langle x,x\rangle = 2\int_0^2 x^2\,dx = \frac{2}{3}.8 = \frac{16}{3}$$

$$\langle x^2,x^2\rangle = \langle x^3,x\rangle = 2\int_0^2 x^4\,dx = \frac{2}{5}.32 = \frac{64}{5}$$

$[\ \ \ \ ][\ \ ] \quad [\ 0\ ] \quad [16 \quad \frac{64}{5} \mid 0] \quad [16 \quad \frac{64}{5} \mid 0] \qquad c =$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x^3,1\rangle \\ \langle x^3,x\rangle \\ \langle x^3,x^2\rangle \end{bmatrix}, \quad \text{ou sis}$$

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-2}^{2} 1 \cdot dx = 2-(-2) = 4$$

$$\langle x,1\rangle = \langle 1,x\rangle = \langle x,x^2\rangle = \langle x^2,x\rangle = \langle x^3,1\rangle = \langle x^3,x^2\rangle =$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \langle x^2,1\rangle = \langle x,x\rangle = 2\int_0^2 x^2\,dx = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$\langle x^2,x^2\rangle = \langle x^3,x\rangle = 2\int_0^2 x^4\,dx = \frac{2}{5}\cdot 32 = \frac{64}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{3} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 64 \\ \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 64 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, x^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x^3, 1 \rangle \\ \langle x^3, x \rangle \\ \langle x^3, x^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad \text{ou seja: } x^3 \sim a + bx + cx^2$$

$2-(-2) = 4$

$\langle x, x^2 \rangle = \langle x^2, x \rangle = \langle x^3, 1 \rangle = \langle x^3, x^2 \rangle = 0$ (funções ímpares)

$$\langle x, x \rangle = 2\int_0^2 x^2 dx = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$= 2\int_0^2 x^4 dx = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{64}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{64}{15} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} c = 0 \\ b = 2,4 \\ a = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x^3,x\rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-2}^{2} 1.dx = 2-(-2) = 4$$

$$\langle x,1\rangle = \langle 1,x\rangle = \langle x,x^2\rangle = \langle x^2,x\rangle = \langle x^3,1\rangle = \langle x^3,x^2\rangle =$$

$$\langle 1,x^2\rangle = \langle x^2,1\rangle = \langle x,x\rangle = 2\int_0^2 x^2 dx = \frac{2}{3}.8 = \frac{16}{3}$$

$$\langle x^2,x^2\rangle = \langle x^3,x\rangle = 2\int_0^2 x^4 dx = \frac{2}{5}.32 = \frac{64}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 \\ \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{64}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ 4 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $x^3 \sim a + bx + cx^2 = 2,4x$ e dessa forma, com
de $x^3$ sobre $P_2(x)$ com o produto interno dado, o polinômi

$-(-2) = 4$

$\langle x, x^2 \rangle = \langle x^2, x \rangle = \langle x^3, 1 \rangle = \langle x^3, x^2 \rangle = 0$ (funções ímpares)

$$\langle x, x \rangle = 2\int_0^2 x^2\,dx = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$2\int_0^2 x^4\,dx = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{64}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ 4 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{64}{15} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} c = 0 \\ b = 2{,}4 \\ a = 0 \end{array}$$

$bx + cx^2 = 2{,}4x$ e dessa forma, como $2{,}4x$ é a projeção com o produto interno dado, o polinômio mônico $x^3 - 2{,}4x$ é o de grau 3.

$\langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle = \int_0 \quad \frac{1}{5} \quad = \frac{1}{5}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{16}{5} & 0 \\ \frac{16}{5} & 0 & \frac{64}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{64}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{5} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & 0 & \frac{64}{5} \\ 4 & 0 & \frac{16}{5} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{5} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & 0 & \frac{64}{5} \\ \frac{16}{5} & 0 & \frac{16}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Portanto $x^3 \sim a + bx + cx^2 = 2{,}4x$ e dessa forma, co
de $x^3$ sobre $p_2(x)$, com o produto interno dado, o polinô
norma dentre os de grau 3.

$32 = \frac{64}{5}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ 4 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{64}{15} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} c = 0 \\ b = 2,4 \\ a = 0 \end{array}$$

$4x$ e dessa forma, como $2,4x$ é a projeção ortogonal
oduto interno dado, o polinômio mônico $x^2 - 2,4x$ é o de menor

$$\left.\begin{array}{l} +0{,}5x_3 = 2{,}2 \Rightarrow x_2 = 0{,}49 \\ x_2 + x_3 = 3{,}5 \Rightarrow x_1 = 0{,}50 \end{array}\right\} \Rightarrow x = (0{,}5;\, 0{,}49;\, 0{,}97)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}49 \\ 0{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \overset{(4\ \text{s.s.})}{\begin{pmatrix} 3{,}93 \\ 4{,}87 \\ 3{,}46 \end{pmatrix}} = \overset{(4\ \text{s.s.})}{\begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}13 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}} = \overset{(2\ \text{s.s.})}{\begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}13 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow{\rho_1 = 3} \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}13 \\ 0{,}07 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho_2 = 3} \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}07 \\ 0{,}12 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-0{,}5)\ (-0{,}25) \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}05 \\ 0{,}12 \end{pmatrix} (-0{,}21) \rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}05 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} = \tilde{r}$$

o sistema $Ac^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$:

$$\left|\begin{array}{c} 0{,}04 \\ 0{,}05 \\ 0{,}11 \end{array}\right.$$

$3{,}7\, c_3 = 0{,}11 \Rightarrow c_3 = 0{,}030$

$\Rightarrow 3{,}5 c_2 + 0{,}5 c_3 = 0{,}05 \Rightarrow c_2 = 0{,}035 \quad \Rightarrow c^{(0)} = (-0{,}0063;\, 0{,}035;$

$4 c_1 + c_2 + c_3 = 0{,}04 \Rightarrow c_1 = -0{,}0063$