# MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

## Prova de Recuperação - 05/02/2009 - Duração: 2 horas

Em um dado país o desconto mensal de imposto de renda de um cidadão que recebe $x$ unidades monetárias no mês se dá de acordo com a função $d(x)$, definida como $0.1x$ se $x \in [0,1]$, como $0.1 + 3.9\frac{(x-1)^2}{81}$ se $x \in [1,10]$ e como $0.5x - 2^{(10-x)}$ se $x > 10$. (Esta função será usada em todas as questões)

**Questão 1 (2.5 pontos):**
a) Mostre que $d(x)$ é crescente e contínua em $[0, \infty)$.
b) Determine através do método de Newton o rendimento mensal de uma pessoa cujo desconto mensal de imposto de renda é de 3 unidades monetárias, a partir de $x_0 = 9$, com erro inferior a $10^{-3}$. Justifique porque há convergência. A solução é única?

**Questão 2 (2.5 pontos):**
O desconto médio para salários na faixa de 10 a 14 é dado por $M = 0.25 \int_{10}^{14} d(x)dx$. Aproxime $M$ pelo método de 4-Trapézios e 2-Simpsons, estimando os respectivos erros. São dadas as estimativas de erro para:
n-Trapézios: $|E| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_s |f^{(2)}(s)|$, com $h = (b-a)/n$
n-Simpsons: $|E| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max_s |f^{(4)}(s)|$ , com $h = (b-a)/(2n)$

**Questão 3 (2.5 pontos):**
Aproxime a função $d(x)$ por um polinômio de grau menor ou igual a dois pelo MMQ discreto, usando o produto interno $< f, g >= \sum_{i=10}^{14} f(i)g(i)$. Sugestão: use a base $1, (x-12), (x-12)^2$. (Obs: Para resolver sistemas lineares utilize o método de eliminação de Gauss, trabalhando com 3 significativos)

**Questão 4 (2.5 pontos):**
Dados $x_0 < x_1 < ... < x_n$, $(n > 0)$, uma função $f$ definida nestes pontos e os polinômios $p_0$ e $p_1$ (ambos de grau $\leq n-1$) que interpolam $f$ nos pontos $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$ e $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ respectivamente, verifique que

$$p(x) = \frac{(x_n - x)p_0(x) + (x - x_0)p_1(x)}{x_n - x_0}$$

é o polinômio interpolador (de grau $\leq n$) de $f$ em $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ Use este fato para determinar o polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola $d(x)$ em 10, 12 e 14.