MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)
Prova Substitutiva - 13/12/07 - Duração: 2 horas

Observação: Eventuais sistemas lineares devem ser resolvidos por eliminação de Gauss com 4 significativos.

Questão 1 (2.5 pontos): A função $F(t) = 100/(1+9e^{-t/2})$ representa a evolução de uma população ao longo do tempo a partir de $t = 0$. Mostre que esta população é crescente e limitada, e que a equação $F(t) = 25$ possui única solução. Ao aplicarmos o método de Newton para solução desta equação partindo de $t_0 = 1$ haverá convergência? (Justifique!) Calcule 3 iterações partindo de $t_0 = 1$ e avalie se o erro fica menor que 10^{-3} (sem usar o valor da solução exata).

Questão 2 (2.5 pontos): A fórmula de integração numérica $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$ é exata para todo polinômio de grau menor ou igual a 2. Determine seus coeficientes e empregue a fórmula para calcular $\int_0^1 x^3\ dx$.

Questão 3 (2.5 pontos): Determine valores a, b e c de forma a minimizar $\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - bx - c\cos(x))^2\ dx$.

Questão 4 (2.5 pontos): Determine A_1, A_2, A_3 e A_4 tal que $p(2.5) = A_1 p(0) + A_2 p(1) + A_3 p(2) + A_4 p(3)$ qualquer que seja o polinômio p de grau menor ou igual a 3. Seja $f(x) = cos(x/\pi)$ e use a expressão $f(2.5) = A_1 f(0) + A_2 f(1) + A_3 f(2) + A_4 f(3)$ para estimar $f(2.5)$ e delimite o erro cometido, de acordo com a estimativa de erro. Use o valor exato de $f(2.5)$ apenas para confirmar sua delimitação de erro.

Fórmulas de erros: Trapézios: $|Erro| \leq max|f''(x)|(b-a)h^2/12$

Simpsons : $|Erro| \leq max|f^{(4)}(x)|(b-a)h^4/180$

Interpolação (grau k): $(f(x) - p(x)) = \frac{(f^{(k+1)}(y_x))}{(k+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_k)$, para algum y_x no intervalo em questão. Em todas as fórmulas estamos supondo que f seja suficientemente diferenciável.

Polinômios ortogonais de Legendre (em [-1,1]): 1, x, $x^2 - 1/3$, $x^3 - 3x/5$, $x^4 - 6x^2/7 + 3/35$, ...