MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Prova 1 - 16/09/04 - Duração: 2 horas

Questão 1 (2.5 pontos): Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ 1.1 & 2.0 & 3.4 \\ 0.3 & 3.0 & 3.0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -0.3 \\ -1.7 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (2.0 pontos): Utilize o método de eliminação de Gauss para calcular o determinante da seguinte matriz (trabalhe com frações):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Questão 3 (2.5 pontos): a) Mostre que a função $g(x) = \frac{2-e^x+x}{2}$ tem um único ponto fixo $\bar{x}$ no intervalo [0,1].
b) Mostre que a sequência $x_{n+1} = g(x_n)$ é convergente para o ponto fixo de g, independentemente da escolha de x_0 em $[0,1]$.
c) Calcule 3 iterações a partir de $x_0 = 0$ e delimite o valor de $|x_3 - \bar{x}|$, sem calcular $\bar{x}$.

Questão 4 (3.0 pontos): Utilize o método de Newton para determinar qual é o ponto do gráfico da função $y = x^2$ que se encontra mais próximo ao ponto de coordenadas $(1,0)$. A coordenada x deste ponto deve ser calculada com precisão pré-fixada de 10^{-3}. Justifique suas afirmações e escolhas de forma a garantir a convergência do método de Newton.

50

MAP 2121 GABARITO DA P1 16/09/04

Q1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1.1 & 2 & 3.4 & -0.3 \\ 0.3 & 3 & 3 & -1.7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0.55 & 1.5 & 4.0 & -1.4 \\ 0.15 & 2.9 & 3.2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0.15 & 2.9 & 3.2 & -2 \\ 0.55 & 1.5 & 4.0 & -1.4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0.15 & 2.9 & 3.2 & -2 \\ 0.55 & 0.52 & 2.3 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$p_2 = 3$

Portanto: $x_3 = \dfrac{-0.4}{2.3} = -0.17$

$x_2 = \dfrac{1}{2.9}(-2 + 0.54) = -0.52$

$x_1 = \dfrac{1}{2}(2 + 0.52 - 0.17) = 1.2$

Q2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5/2 & 7/2 & -9/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 7/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$P_2 = 3$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 7/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -3/5 & 11/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 7/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 43/25 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -\left(2 \times \frac{5}{2} \times 5 \times\right.$$

$= -33$

$\boxed{Q3}$ (a) $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ e $g(1) = \frac{3-e}{2} < 1$, portanto o gráfico de g cruza a diagonal $x = y$ ao menos uma vez no intervalo $[0,1]$. Além disso, $g'(x) = \frac{1-e^x}{2} < 0$ em $(0,1]$ e, portanto, g é decrescente neste intervalo. Portanto o gráfico de g cruza a diagonal exatamente uma vez em $[0,1]$, isto é, g tem exatamente um ponto fixo no intervalo.

(b) $g'(x) = \frac{1}{2}(1-e^x)$ é decrescente e contínua. Assim, como $g'(0) = 0$,

$$\text{(i)} \quad \max_{x \in [0,1]} |g'(x)| = |g'(1)| < 0.86.$$

(ii) Como $g(0) = 0.5$ e $g(1) = \frac{3-e}{2} \simeq 0.14$ e g é decrescente, vemos que $g([0,1]) \subset (0,1)$.

Pelo que vimos em sala, os itens (i) e (ii) implicam que a sequência $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para o ponto fixo $\bar{x}$ de g para qualquer escolha de $x_0 \in [0,1]$.

(c) $0 \xrightarrow{g} \frac{1}{2} \xrightarrow{g} 0.42564 \xrightarrow{g} 0.44754$.

(i) Da estimativa do erro $E_n \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$, temos

$$E_3 \leq \frac{0.86}{1-0.86}|0.44754 - 0.42564| = 0.13453$$

(ii) <u>Outra solução p/ o erro</u>: Como a convergência é alternada ($g' < 0$) tomando $\tilde{x} = \frac{x_2 + x_3}{2} = 0.43659$ sabemos que o erro é estimado

$$|\tilde{x} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|x_3 - x_2| = 0.01095 \quad \leftarrow \text{MELHOR!}$$

(iii) $E_3 \leq k^3 E_0 \leq (0.86)^3 \times 1 = 0.636056$

24) Temos que minimizar a distância entre $(1,0)$ e pontos da forma (x,x^2), ou, o que dá no mesmo, minimizar o quadrado desta distância, que é,

$$g(x) = d\left((1,0),(x,x^2)\right)^2 = (1-x)^2 + (x^2)^2 = 1 - 2x + x^2 + x^4$$

Temos então que achar a raiz de $f(x) = g'(x) = 4x^3 + 2x - 2$. Note que $f'(x) = 12x^2 + 2$ portanto f é crescente. Como $f(0) = -2$ e $f(1) = 4$, a única raiz de f está em [0 Além disso, $f''(x) = 24x$ e portanto f é convexa em $\{x \geq 0\}$. Tomando então um pont direita da raiz, sabemos que o Método de Newton convergirá.

O Método de Newton para f é $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{8x^3+2}{12x^2+2}$

Utilizamos agora o método para calcular raízes com precisão pré-fixada $\delta = 0.00$ começando com $x_0 = 1 > \bar{x}$, e arredondando em favor da segurança (isto é, para cima, neste caso), obtemos a tabela ao lado:

n	x	$\phi(x)$
0	1	0.7143
1	0.7123	0.6048
2	0.6028	0.5897
3	0.5877	0.5898

Como x_3 é o primeiro ponto para o qual $\phi(x_3) > x_3$, vemos que

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x_3 + \phi(x_2)\right) = 0.5887$$

é uma aproximação da raiz satisfazendo $|\bar{x} - \tilde{x}| \leq 0.001$.