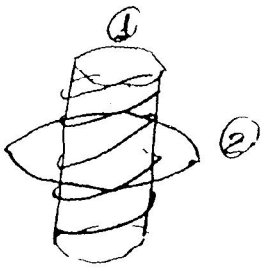
V - Indutância - mútua



Quando temos dois circuitos próximos, 1 e 2, se variarmos a corrente em um deles, o outro sente variação do fluxo de B. Por isso surge uma corrente induzida

Definimos indutância mútua M pela relação entre:

$$\text{ou} \quad \begin{cases} \Phi_{21} = M I_1 \\ \Phi_{12} = M I_2 \end{cases}$$

Em que Φ_{21} é o fluxo em 2 devido a 1 e Φ_{12} é o fluxo em 1 devido ao campo magnético gerado por 1

Como calcular?

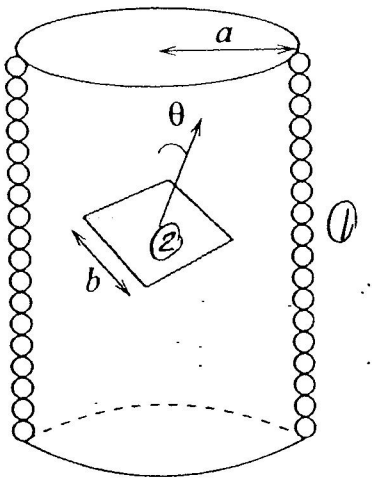
1) Escolhe um dos circuitos e calcula o campo gerado + B_1
2) Calcula o fluxo desse campo no outro → Φ_{21}
3) Divide o fluxo pela corrente do 1° para achar M → $M = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$

PARA ESTUDAR: Resolver questões das P3:

Q2 2007
Q2 2008
Q1 2009
Q1 2010
Q2 2012
Q3 2013

Questão 2 - P3 2007

Considere um solenóide muito longo com secção circular de raio a e n espiras por unidade de comprimento. Uma espira quadrada de lados b e resistência R está no interior do solenóide. Os eixos da espira e do solenóide formam entre si um ângulo θ.



(a) (1,0 ponto) Determine a mútua indutância entre o solenóide e a espira quadrada.

(b) (1,0 ponto) Se a corrente no solenóide é dada por $I = I_0 \cos(\omega t)$ determine a corrente i induzida na espira.

(c) (0,5 pontos) Se a espira quadrada é formada não por uma única volta de fio, mas por N voltas de fio, calcule a nova mútua indutância.

a) i) O campo gerado pelo solenoide 1:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N I_1}{h} = \mu_0 n I_1$$

ii) O fluxo de B_1 na espira 2:

$$\Phi_{21} = \int B_1 \cdot \hat{n}\, dA = \int B_1 \cdot \cos\theta \, dA = B_1 \cos\theta \cdot A$$

$$\Phi_{21} = \mu_0 n I_1 \cos\theta \, b^2$$

iii) $M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 n b^2 \cos\theta}$

b) i) $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n b^2 \cos\theta\ I_1\right)$

$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n b^2 \cos\theta\ I_0 \cos(\omega t)\right)$

$\mathcal{E} = \mu_0 n b^2 \cos\theta\ I_0\ \omega \sin(\omega t)$

ii) Logo: $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{\mu_0 n b^2 \cos\theta\ I_0\ \omega \sin(\omega t)}{R}}$

c)

i) Neste caso o fluxo será:

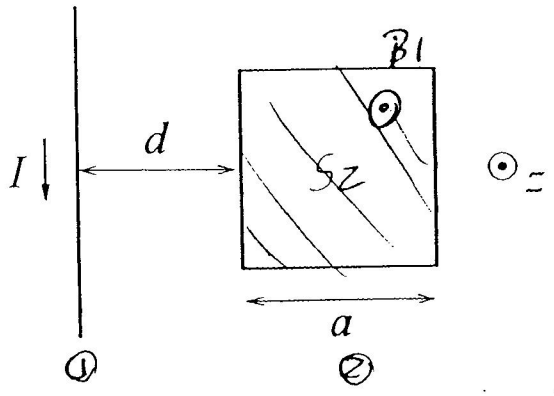
$\Phi_{21} = \Phi$ total $= N\Phi$ espira

$\Phi_{21} = \Phi$ total $= N \mu_0 n\ I_1 \cos\theta\ b^2$

ii) $M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 N n b^2 \cos\theta}$

Questão 3 - P3 2013

Uma espira condutora quadrada de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor infinito percorrido por uma corrente I, a uma distância d.



(a) (1,5 ponto) Calcule a indutância mútua do sistema. Escolha a normal à espira no sentido positivo do eixo z. Obs: o campo magnético a uma distância r de um fio infinito percorrido por uma corrente I é $\mu_0 I/(2\pi r)$.

(b) (1,0 ponto) Para $I = \alpha t$ com $\alpha > 0$, calcule a corrente induzida na espira quadrada e determinar seu sentido (justifique sua resposta).

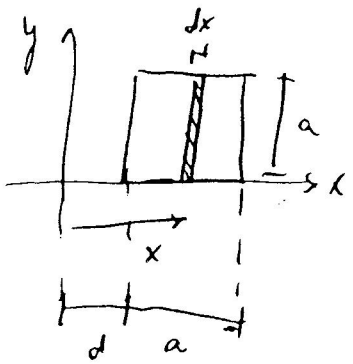
(a) Sendo o fio o corpo 1 e a espira, 2:

i) Calcular campo gerado por um deles: $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

ii) Calcular fluxo desse campo no outro:

Na espira, calculamos: $\Phi_{21} = \int_{Sz} \underbrace{B_1 \cdot \hat{n}}_{\text{paralelos}} dA = \int_{Sz} B_1 \, dA$

Dividimos $dA = a\,dx$, de modo que:



$$\Phi_{21} = \int_{d}^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} (a\,dx)$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

iii) Calculamos M:

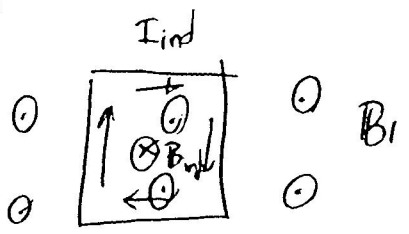
$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right)}{I}$$

$$\boxed{M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$$

(b) Para $I = \alpha t$, o fluxo através da espira aumenta na direção $(+\hat{k})$ ao longo do tempo, pois Φ_{21} é proporcional a I

Pela Lei de Lenz, a corrente induzida deve ser tal que o campo magnético por ela gerado diminua o fluxo nesse sentido

Logo, a corrente na espira tem SENTIDO HORÁRIO

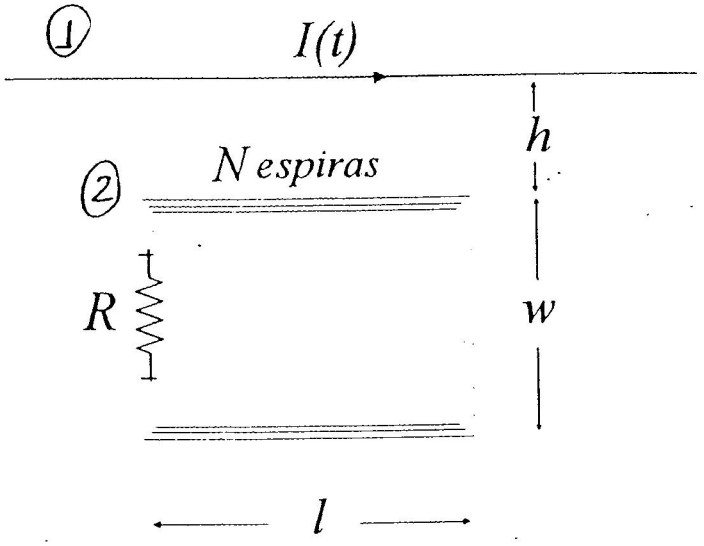


Questão 2 – P3 2012

A figura abaixo mostra um fio condutor retilíneo, conduzindo uma corrente

$$I(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t).$$

O fio é coplanar a uma bobina retangular com N espiras compactas. A bobina possui resistência R. O fluxo ϕ_m do campo magnético $B(t)$ gerado pelo fio através de uma espira da bobina é dado por $\phi_m = C\,I(t)$, onde C não depende do tempo.



(a) (0,5 ponto) Obtenha a indutância mútua do sistema fio e bobina em função de N e C.

(b) (1,0 ponto) Calcule a potência instantânea $P(t)$ dissipada na bobina.

(c) (1,0 ponto) Calcule o fluxo ϕ_m e através dele determine o valor da constante C em termos de μ_0, l, h e w.

a) i) O fluxo total na bobina (2) será:

$$\Phi_{total} = N \cdot \Phi_{espira} = NCI$$

ii) A indutância mútua será, portanto:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{NCI}{I} \Rightarrow \boxed{M = NC}$$

b) Vamos achar a corrente induzida na bobina (I_2)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[NCI] = \frac{-d}{dt}[NC I_0 \sin(\omega t)]$$

$$\mathcal{E} = -NC\omega I_0 \cos(\omega t)$$

Logo a corrente é: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{NC\omega I_0 \cos(\omega t)}{R}$

A potência dissipada será:

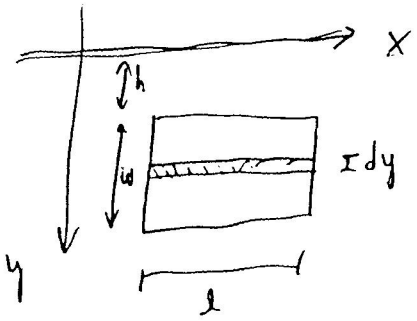
$$Pot = RI^2$$

$$\boxed{Pot = \frac{[NC I_0 \omega \cos(\omega t)]^2}{R}}$$

c) i) O campo gerado pelo fio é: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

ii) O fluxo em uma espira será:

$$\Phi_{espira} = \int B \cdot \vec{n}\, dA = \int B\, dA = \int_h^{w+h} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}(l\, dy)$$



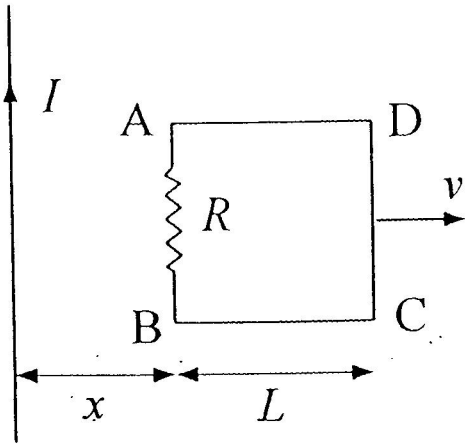
$$\Phi_{espira} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{h+w}{h}\right)$$

Mas do enunciado $\Phi_{espira} = CI$

Logo $$\boxed{C = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{h+w}{h}\right)}$$

Questão 2 - P3 2008

Um fio retilíneo muito longo conduz uma corrente I. Uma espira quadrada de lado L, com resistência R, move-se com velocidade v constante, conforme é indicado na figura. No instante $t = 0$ a distância x entre o lado AB da espira e o fio é igual a L ($x(0) = L$).



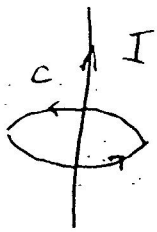
(a) (0,5 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético produzido pelo fio.

(b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético na espira em função de t.

(c) (0,5 ponto) Determine a intensidade e o sentido (horário ou anti-horário) da corrente induzida na espira.

(d) (0,5 ponto) Calcule a indutância mútua M entre o fio e a espira.

a)

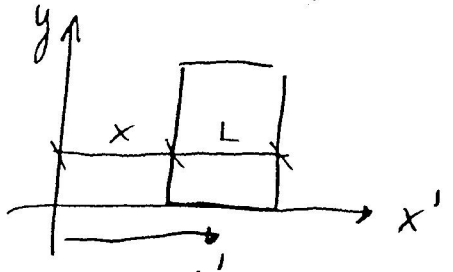


$$\oint \vec{B}\, d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

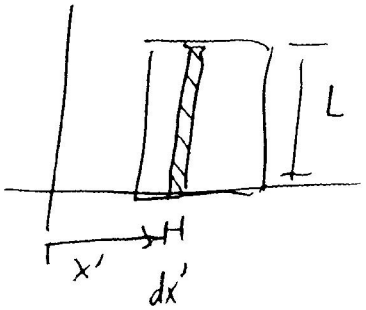
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

b) Na região da espira : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}(-\hat{k})$



Se dividirmos em elementos equidistantes do fio, adotando $\hat{n} = -\hat{k}$



$$\Phi_B = \int \underbrace{\vec{B} \cdot \hat{n}}_{\text{paralelos}} \, dA = \int B \, dA$$

$$\Phi_B = \int_{x}^{x+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi x'} L \, dx' = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln\left(\frac{x+L}{x}\right)$$

Mas quem é x? $x = L + vt$ (pelo enunciado)

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_B = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln\left(\frac{vt+2L}{vt+L}\right)}$$

c) i) $$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \left(\frac{vt+L}{vt+2L}\right) \left(\frac{v(vt+L) - (vt+2L)v}{(vt+L)^2}\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I L^2 v}{2\pi (vt+L)(vt+2L)}$$

ii) $$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I_{ind} = \frac{\mu_0 I L^2 v}{2\pi R (vt+L)(vt+2L)}}$$

O sentido de I_{ind} pela Lei de Lenz é HORÁRIO, pois conforme passa o tempo, a espira se afasta do fio e o fluxo em $\otimes$ diminui. Logo I_{ind} deve gerar campo em $\otimes$.

d) $$M = \frac{\Phi_B}{I} \Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{vt+2L}{vt+L}\right)}$$

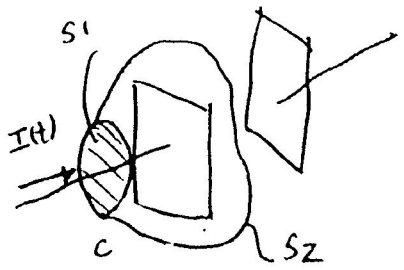
VI - Corrente de Deslocamento

Pela lei de Ampère vimos que:

$$\oint_C \mathbb{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Onde C é uma curva fechada e I é a corrente que atravessa <u>qualquer</u> superfície S apoiada em C.

Um problema surge quando olhamos um capacitor



O resultado da Lei de Ampère seria distinto para cada uma das superfícies na imagem anterior. Ao usarmos S_2, como não passa corrente teríamos

$$\mathbb{B} = \vec{0}$$

Mas se usássemos S_1 teríamos $\mathbb{B} \neq \vec{0}$, uma vez que há corrente atravessando S_1.

Como resolver este problema?? Maxwell deu um jeitinho criando o conceito de <u>corrente de deslocamento</u> (I_d), que é calculada por:

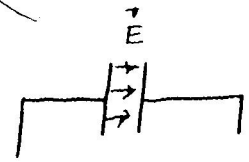
$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbb{E}\, d\vec{A}$$

Assim, a Lei de Ampère - Maxwell fica:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_d$$

I: corrente que fura S ; I_d: corrente de deslocamento

Exemplo 1: P1 FÍSICA IV 2009



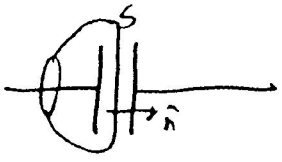
Sabendo que o capacitor da Figura é formado por duas placas circulares paralelas de raio R, calcule a corrente de deslocamento I_d entre as placas. Usando $Q(t) = Q_m \sin(\omega t + \phi)$

Solução

i) Para começar, lembramos que o campo elétrico entre as placas do capacitor tem módulo

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}$$

ii) Tomamos uma superfície que passe entre as placas



Haverá fluxo de $\vec{E}$ apenas na região entre as placas de forma que:

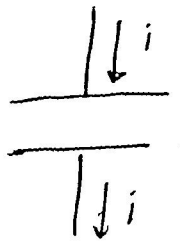
$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \underbrace{\vec{E}\cdot\hat{n}}_{=E,\ \text{na região entre placas}} dA = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \frac{Q}{\varepsilon_0 A} dA$$

$$I_d = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{A}\right) \int_S dA = \frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} Q_m \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{I_d = Q_m \omega \cos(\omega t + \phi)}$$

Exemplo 2 : P1 de FÍSICA IV de 2010

Considere um capacitor de placas paralelas e quadradas de área A, carregados por uma corrente i.



a) Calcule dE/dt na região entre as placas em função de i, A e ε_0.

Sol| $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{A\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{A\varepsilon_0}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = \frac{i}{A\cdot\varepsilon_0}$

b) Calcule a corrente de deslocamento entre as placas.

Sol| $I = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dA = \frac{dQ}{dt} = i$

VII - Equações de Maxwell

Se reunirmos as principais equações que vimos até agora na matéria, temos as famosas equações de Maxwell

Forma Integral	Forma Diferencial	Lei de...
$\oint E \cdot \vec{n}\, dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Gauss
$\oint B \cdot \vec{n}\, dA = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	
$\oint E \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	Faraday
$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\Phi_E$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Ampère Maxwell

Em que, se $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$:

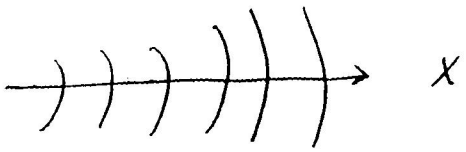
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

VIII - Ondas Eletromagnéticas

A) Ondas viajantes no vácuo

Para ondas se propagando no vácuo na direção x



A partir das equações de Maxwell, pode-se chegar nas equações de onda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \mathbb{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{B}}{\partial t^2}}$$

Para uma direção qualquer, pode-se usar a forma geral:

$$\nabla^2 \mathbb{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \mathbb{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{B}}{\partial t^2}$$

Para ondas progressivas, temos uma solução do tipo

Propagação no sentido $+x$	Propagação no sentido $-x$
$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 \cos(Kx - \omega t + \phi)$	$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 \cos(Kx + \omega t + \phi)$
$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \cos(Kx - \omega t + \phi)$	$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \cos(Kx + \omega t + \phi)$

Em que $|\mathbb{E}_0| = E_0$ é a amplitude do campo elétrico e $|\mathbb{B}_0| = B_0$ é a amplitude do campo magnético (nos exercícios pode-se fornecer esses valores graficamente ou numericamente)

w = Frequência angular $\Rightarrow \boxed{w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F}$

K = número de onda $\Rightarrow \boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda}}$

Além disso : $\boxed{w = K\,c}$ e $\boxed{c = \lambda F}$

Relacionando $\mathbb{B}$ e $\mathbb{E}$: $\mathbb{B}$ e $\mathbb{E}$ são ortogonais entre si e ortogonais à direção de propagação

E mais: $\boxed{\mathbb{B} = \frac{1}{c}\,[\hat{i}] \times \mathbb{E}}$ → aqui entra direção e sentido da propagação. Não necessariamente $\hat{i}$

Obs: $\mathbb{E} \times \mathbb{B}$ tem a direção e sentido da propagação

B) Ondas Fora do vácuo

A velocidade de uma onda eletromagnética no vácuo (c) é:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

ε_0 = permissividade elétrica do vácuo

μ_0 = permissividade magnética do vácuo

Em outros meios:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \text{usando} \quad \varepsilon = K\varepsilon_0 \text{ e } \mu = K_m \mu_0$$

$$\neq v = \frac{1}{\sqrt{K \cdot K_m}}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K K_m}}$$

Definindo $n = \sqrt{K \cdot K_m}$ o índice de refração do meio temos:

$$\boxed{v = \frac{c}{n}}$$

Assim podemos usar as equações:

$$v = \lambda f \; ; \; w = Kv \; ; \; |B| = \frac{1}{v} |E|$$

c) Energia, momento e pressão de uma onda

- Energia por unidade de volume:

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}}$$

* Varia no tempo pois E e B oscilam

- Vetor de Poyting ($\vec{S}$): indica para onde está indo a energia.

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbb{E} \times \mathbb{B}}$$

Ou, em módulo:

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} cB^2$$

Ou ainda:

$$\boxed{|\vec{S}| = cU}$$

- **Intensidade**: é a média temporal de $|\vec{S}|$ e vale:

$$I = \langle S \rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{c B_0^2}{2\mu_0}$$

$\langle \dots \rangle$ = média temporal

- **Potência**: dada a intensidade, podemos achar a potência em uma superfície como:

$$\langle Pot \rangle = \langle S \rangle \times Área$$

↑ Potência média ↑ Intensidade

- **Momento**: uma onda possui momento, que pode ser dado por:

$$U = P \cdot c$$

Ou, em termos de densidade de momento (p)

$$U = p\,c$$

↑ densidade de energia (energia por volume) ↑ densidade de momento

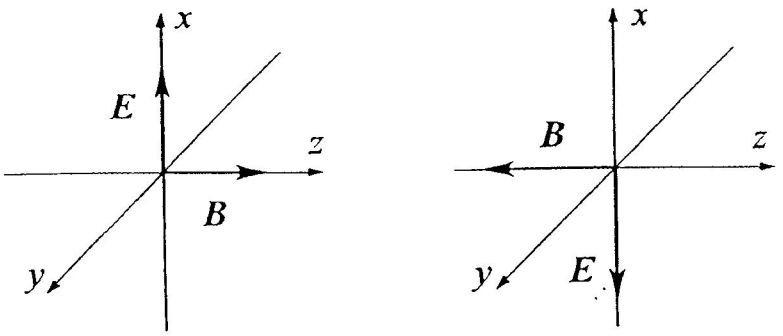
- **Pressão de Radiação**

SUPERFÍCIE ABSORVENTE: $\langle P_{rad} \rangle = \langle U \rangle$

SUPERFÍCIE REFLETORA: $\langle P_{rad} \rangle = 2\langle U \rangle$

Questão 3 - P1 FÍSICA IV 2013

A figura abaixo representa os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ de uma onda eletromagnética plana monocromática, no vácuo, na origem do sistema de coordenadas em dois instantes diferentes. Nestes dois instantes $|\vec{E}| = 1/\sqrt{2}$ V/m. A frequência da onda é $f = 0,25 \times 10^9$ Hz e sua velocidade de propagação $c = 3 \times 10^8$ m/s.



(a) (1,0 ponto) Determine o sentido de propagação da onda. Calcule o comprimento de onda λ, a frequência angular ω e o número de onda k.

(b) (1,0 ponto) Escreva a expressão completa do vetor campo elétrico indicando a dependência nas coordenadas e no tempo.

(c) (0,5 ponto) Escreva a expressão do vetor campo magnético $\vec{B}$ associado ao campo elétrico dado.

a) i) Podemos achar o sentido de propagação por $\vec{E} \times \vec{B}$:

$$(+\hat{i}) \times (+\hat{k}) = -\hat{j}$$

Logo a onda se propaga no sentido negativo de y

ii) A onda está no vácuo, logo $v = c$:

$$c = \lambda f$$

$$3 \cdot 10^8 = \lambda \cdot 0,25 \times 10^9$$

$$\boxed{\lambda = 1,2\,m}$$

iii)

$$\omega = 2\pi F$$

$$\omega = 2\pi \left(0{,}25 \times 10^{9}\right)$$

$$\boxed{\omega = 5\pi \cdot 10^{8}\ s^{-1}}$$

iv) $K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{1{,}2} \Rightarrow \boxed{K = \dfrac{5\pi}{3}\ m^{-1}}$

b) O campo tem a forma:

$$\mathbb{E} = E_0 \cos\left(ky + \omega t + \phi\right)\hat{i}$$

Substituindo os valores para os instantes dados:

- $\mathbb{E}(0,0) = E_0 \cos\phi\ \hat{i}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} = E_0 \cos\phi\ \hat{i} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} = E_0 \cos\phi \quad (1)}$$

- $\mathbb{E}\left(0, 10^{-9}\right) = E_0 \cos\left(\underbrace{5\pi \cdot 10^{8} \cdot 10^{-9}}_{kt} + \phi\right)\hat{i}$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}\hat{i} = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\hat{i}$$

$$\boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}} = E_0(-\operatorname{sen}\phi) \quad (2)}$$

Dividindo (2)/(1): $\operatorname{tg}\phi = 1 \Rightarrow \phi = \pi/4$

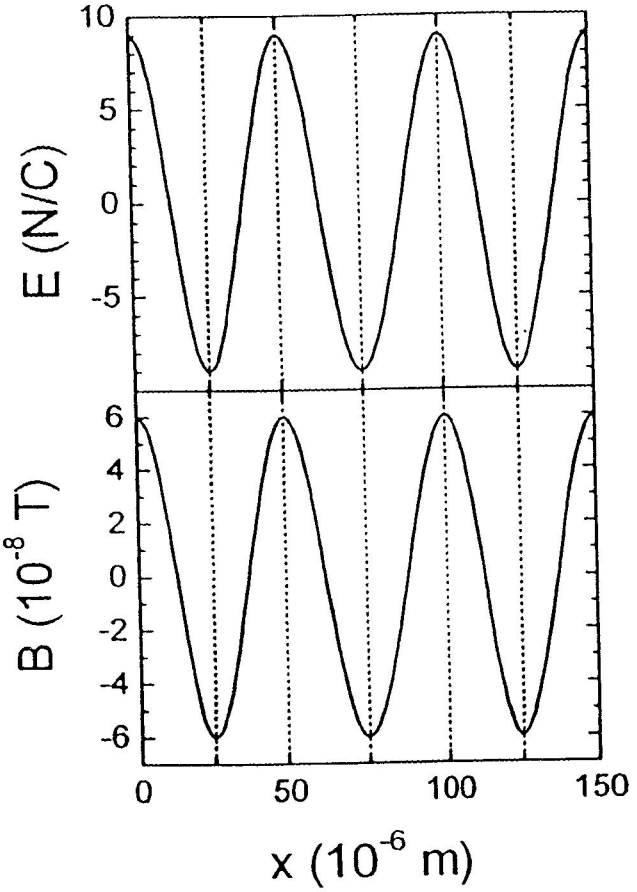
Voltando em (1): $E_0 = 1$

Logo $\boxed{\mathbb{E} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}y + 5\pi \cdot 10^{8}t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{i}}$

c) $\mathbb{B} = \dfrac{1}{c}(-\hat{j}) \times \mathbb{E} \Rightarrow \boxed{\mathbb{B} = \frac{1}{3} \times 10^{-1} \cos\left(\frac{5\pi}{3}y + 5\pi \cdot 10^{8}t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{k}}$

Questão 3 - P1 FÍSICA IV 2012

Uma onda eletromagnética plana e monocromática propaga-se num meio material com permeabilidade magnética igual a μ_0. No instante $t = 0$, os campos elétrico e magnético são descritos por $\vec{E} = E\vec{k}$ e $\vec{B} = B\vec{j}$, onde E e B são funções de x apresentadas na figura abaixo. São dados: $c = 3 \times 10^8$ e $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ C^2 / Nm^2.



(a) (0,5 ponto) Qual é a direção de propagação dessa onda? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Quais são a velocidade dessa onda e o índice de refração do meio?

(c) (0,5 ponto) Qual é o valor da permissividade desse meio?

(d) (0,5 ponto) Qual é a frequência dessa onda?

(e) (0,5 ponto) Em relação a esta onda, qual é a média temporal da energia contida num volume correspondente a um metro cúbico?

a) $\vec{E} \times \vec{B}$ tem direção da propagação. Logo a onda se propaga em: $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

b) Sabemos que $|E| = c|B|$ no vácuo e em outros meios $|E| = v|B|$

Assim: $v = \frac{|E|}{|B|} = \frac{9}{6 \times 10^{-8}}$

$$\boxed{v = 1{,}5 \times 10^{8}\ m/s}$$

E: $n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^{8}}{1{,}5 \times 10^{8}} \Rightarrow \boxed{n = 2}$

c) $n = \frac{c}{v} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{1/\sqrt{\varepsilon \mu}}$, Mas $\mu = \mu_0$

$2 = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \varepsilon = 4\varepsilon_0$

$$\boxed{\varepsilon = 36 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2}$$

d) Do gráfico vemos que o comprimento de onda é $\lambda = 50 \times 10^{-6}\ m$. Assim:

$v = \lambda f$

$1{,}5 \times 10^{8} = 50 \times 10^{-6} \cdot f$

$$\boxed{f = 3 \times 10^{12}\ s^{-1}}$$

e) $\langle u \rangle = \frac{\varepsilon E_0^2}{2}$ ou $\langle u \rangle = \frac{B_0^2}{2\mu}$

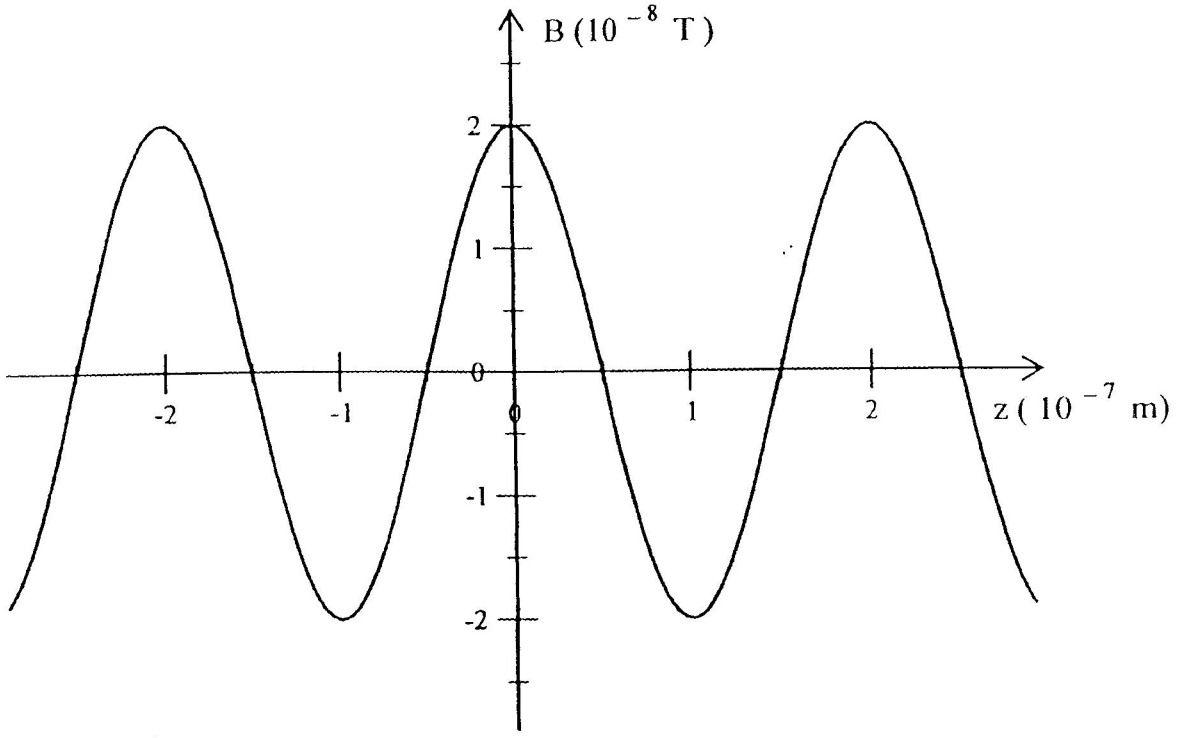
$\langle u \rangle = \frac{(36 \times 10^{-12}) \times 9^2}{2} \Rightarrow \boxed{\langle u \rangle \approx 1{,}5 \times 10^{-9}\ J/m^3}$

Em um volume $V = 1\ m^3$

$U = \langle u \rangle \cdot V \Rightarrow \boxed{U = 1{,}5 \times 10^{-9}\ J}$

Questão 2 - PJ FÍSICA IV 2011

Uma onda eletromagnética, plana e monocromática, se propaga no vácuo na direção positiva do eixo z. Seu campo magnético oscila na direção do eixo y e o gráfico de $B \times z$ é mostrado na figura abaixo para o instante $t = 0$.



(a) (0.5 ponto) Calcule o número de onda k e a frequência angular ω (use $c = 3 \times 10^8$ m/s para a velocidade da luz).

(b) (1,0 ponto) Escreva a expressão para o vetor campo magnético $\vec{B}$ para todo o espaço e para qualquer instante t.

(c) (1,0 ponto) Escreva a expressão para o vetor campo elétrico $\vec{E}$ para todo o espaço e para qualquer instante t.

a)

Do gráfico vemos que o comprimento de onda é $\lambda = 2 \times 10^{-7}\ m$. Assim, podemos calcular

NÚMERO DE ONDA

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\times 10^{-7}}$$

$$\boxed{k = \pi \cdot 10^{7}\ m^{-1}}$$

FREQUÊNCIA ANGULAR

$$w = k \cdot c$$

$$w = \pi \cdot 10^{7} \cdot 3 \cdot 10^{8}$$

$$\boxed{w = 3\pi \times 10^{15}\ s^{-1}}$$

b) Do gráfico temos a amplitude : $B_0 = 2 \times 10^{-8}\ T$

Assim, $\vec{B}$ é na forma

$$\vec{B} = 2 \times 10^{-8} \cos(kz - wt + \phi)\ \vec{j}$$

$\vec{j}$ ← do enunciado, $\vec{B}$ em y

kz ↑ onda se propaga em $+\hat{z}$

Como para $z=0$ e $t=0$, $\vec{B} = \vec{B_0}$, sabemos que $\phi = 0$

Assim:

$$\boxed{\vec{B} = 2\times 10^{-8} \cos(\pi \cdot 10^{7} z - 3\pi \cdot 10^{15} t)\ \vec{j}}$$

c)

Sabemos que $\vec{E} \times \vec{B}$ tem direção e sentido da propagação. Assim $\vec{E}$ tem direção $(\vec{i})$

Além disso, $|B| = \frac{1}{c} |E|$

$$\therefore |E| = 6 \cos(\pi \cdot 10^{7} z - 3\pi\, 10^{15} t)$$

$$\boxed{\vec{E} = 6 \cos(\pi \times 10^{7} z - 3\pi \cdot 10^{15} t)\ \vec{i}}$$

Questão 3 — P1 FÍSICA IV 2011

A onda eletromagnética com campo elétrico $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$ incide perpendicularmente sobre uma placa totalmente refletora de área A.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado à onda.

(b) (1,0 ponto) Calcule a força média (vetor) exercida pela onda sobre a placa.

(c) (0,5 ponto) Calcule as densidades médias de energia e momento (módulo) transportadas pela onda.

a) i) $\vec{B} = \frac{1}{c}|\vec{k}| \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{k} \times E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{i}$

$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\hat{j}$

Como $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \ldots)$ Sabemos que a onda se propaga na direção z e positivo pelo sinal $\ominus$

ii) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{c}\cos^2(kz - \omega t)\vec{k}$

Ou ainda, se multiplicar em cima e embaixo por $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

Ou: $|\vec{S}| = c\varepsilon_0 E^2 = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$

E como sabemos que $\vec{S}$ tem direção e sentido da propagação:

$$\vec{S} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\vec{k}$$

Que é o mesmo resultado se trocar $c\varepsilon_0$ por $\Rightarrow c\varepsilon_0 \cdot \frac{c}{c} = \frac{c^2\varepsilon_0}{c} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\varepsilon_0}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}$

b)

i) A pressão da radiação é:

$$P_{rad} = \langle 2u \rangle = 2\frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{c}$$

$$P_{rad} = \varepsilon_0 E_0^2$$

ii) A força será: (direção da propagação)

$$\vec{F} = P_{rad} \cdot A \cdot \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{F} = \varepsilon_0 E_0^2 A \hat{z}}$$

c)

i) Para energia:

$$\langle u \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

ii) Para momento:

$$\langle p \rangle = \frac{\langle u \rangle}{c} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2c}$$

Questão 4 – P1 FÍSICA IV 2011

Suponha que o campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo na ausência de cargas e correntes seja dado pela expressão

$$\vec{E} = (\vec{\imath}E_0 + \vec{\jmath}E_1)\cos(at + by),$$

onde E_0, E_1, a e $b > 0$ são constantes.

(a) (0,5 ponto) Partindo da lei de Gauss na forma diferencial determine E_1.

(b) (1,0 ponto) Partindo da lei de Faraday na forma diferencial determine o campo magnético associado ao campo elétrico dado.

(c) (1,0 ponto) Partindo da equação de onda satisfeita por $\vec{E}$ determine a relação entre as constantes a e b.

a) Usamos a lei de Gauss:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

No vácuo $\rho = 0$

$$0 = \varepsilon_0 \left(\cancel{\frac{\partial E}{\partial x}}_{\,0} + \frac{\partial E}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial E}{\partial z}}_{\,0} \right)$$

$$0 = \varepsilon_0 \left(-E_1 b \operatorname{sen}(at + by) \right)$$

Como $b \neq 0$ e deve dar zero para todo y e t, segue que:

$$\boxed{E_1 = 0}$$

b) Da Lei de Faraday na forma diferencial:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Ex & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial Ex}{\partial y}\hat{k}$$

Como $Ex = E_0 \cos(at + by)$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = E_0 b \operatorname{sen}(at + by)\,\hat{k}$$

Integrando:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0 b}{a}\cos(at + by)\,\hat{k}}$$

c) Da equação de onda:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$-E_0 b^2 \cos(at + by)\,\hat{i} = \frac{1}{c^2}\left[-a^2 E_0 \cos(at + by)\,\hat{i}\right]$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{1}{c} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Questão 4 - PJ FÍSICA IV P 2013

Um laser de intensidade I produz um feixe de radiação monocromático, cilíndrico e com seção reta de raio R. O feixe incide perpendicularmente sobre uma placa que o absorve totalmente.

(a) (0,5 ponto) Calcule a potência média emitida pelo laser.

(b) (0,5 ponto) Calcule a amplitude do campo elétrico e do campo magnético do feixe incidente.

(c) (1,0 ponto) Calcule a força exercida pela radiação sobre a placa.

(d) (0,5 ponto) Calcule a densidade volumétrica média de energia do feixe.

a) $\langle P \rangle = I \cdot A$

$$\boxed{\langle P \rangle = I \pi R^2}$$

b) Sabemos a intensidade:

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}$$

Além disso sabemos que $E_0 = c B_0$

Logo: $E_0 = \sqrt{2\mu_0 c I}$ e $B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}$

c) A pressão para superfície absorvente é:

$$P_{rad} = \langle U \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}$$

Logo a força será:

$$F = P_{rad} \cdot A \Rightarrow \boxed{F = \frac{I}{c} \pi R^2}$$

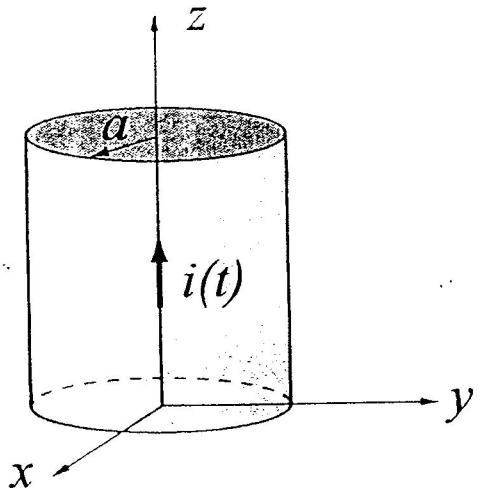
d) A densidade de energia no feixe é:

$$\langle u \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c}$$

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{I}{c}}$$

Questão 2 - P1 FÍSICA IV 2013

Um resistor cilíndrico muito longo de raio a é feito de um material de condutividade σ e permissividade dielétrica ϵ_0 igual ao do vácuo. Uma voltagem variável é aplicada de tal modo que a corrente através do resistor é dada por $i(t) = I\cos\omega t$ no sentido do eixo z, conforme a figura.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor densidade de corrente elétrica $\vec{J}_C$ devido às cargas, supondo que seja uniforme no interior do resistor.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ usando a lei de Ohm.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor densidade de corrente de deslocamento $\vec{J}_D$.

(d) (1,0 ponto) Use a lei de Ampère-Maxwell para determinar o vetor campo magnético $\vec{B}$ no interior do resistor a uma distância r do seu eixo.

a) $\vec{J_c} = \frac{i}{A}\vec{k} = \frac{I\cos\omega t}{\pi a^2}\vec{k}$

b) Da Lei de Ohm:

$$E = \frac{\vec{J_c}}{\sigma} = \frac{I\cos\omega t}{\sigma\pi a^2}\vec{k}$$

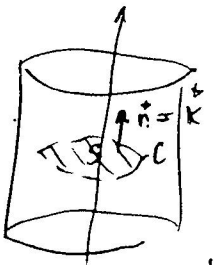
c) $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \left(\frac{I}{\sigma \pi a^2} \right) \cdot \omega \, (-\sin \omega t) \, \hat{k}$

$$\boxed{\vec{J}_D = -\frac{\varepsilon_0 I \omega}{\sigma \pi a^2} \sin \omega t \, \hat{k}}$$

d) Para $r < a$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{J}_C + \vec{J}_D) \cdot \hat{n} \, dA$$

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 \int_S (J_C + J_D) \, dA$$



$$B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{I}{\pi a^2} \cos \omega t - \frac{\varepsilon_0 I \omega}{\sigma \pi a^2} \sin \omega t \right) \cdot \pi r^2$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \left(\cos \omega t - \frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma} \sin \omega t \right) \hat{\theta}}$$

Questão 4 – P1 FÍSICA IV 2014

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por $\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath}$ com

$$E_x = -E_1 \cos[\omega t - \beta(x+y)],$$
$$E_y = E_2 \cos[\omega t - \beta(x+y)],$$

onde E_1, E_2, β e ω são constantes positivas. O valor máximo atingido pelo módulo do campo elétrico $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ é E_0.

(a) (0,5 pontos) Use a forma diferencial da lei de Gauss para determinar E_1 e E_2 em termos de E_0.

(b) (1,0 ponto) Sabendo que o campo elétrico satisfaz a equação de onda tridimensional, determine a constante β em termos da velocidade da luz no vácuo c e ω.

(c) (1,0 ponto) Use a forma diferencial da lei de Faraday para determinar o campo magnético associado ao campo elétrico dado em termos de E_0, ω e da velocidade da luz no vácuo c.

a) Usando Gauss: $\nabla \cdot E = \dot{\rho} = 0$ (no vácuo)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$E_1 \cdot \beta \sin(\omega t - \beta(x+y)) - E_2 \beta \sin(\omega t - \beta(x+y)) = 0$$

Daí: $E_1 - E_2 = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$

Como $\sqrt{E_1^2 + E_1^2} = E_0$

$$2E_1^2 = E_0^2 \quad \therefore \boxed{E_1 = E_2 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}}$$

b) Usando a equação de onda:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t^2}$$

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \beta(x+y))\left[\beta^2\hat{i} - \beta^2\hat{j} + \beta^2\hat{i} - \beta^2\hat{j}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \beta(x+y))\cdot\omega^2(\hat{i}-\hat{j})$$

$$2\beta^2 = \frac{1}{c^2}\omega^2$$

$$\boxed{\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}\,c}}$$

C) Da Lei de Faraday:

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times E = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{i} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{k} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\hat{k} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{i}$$

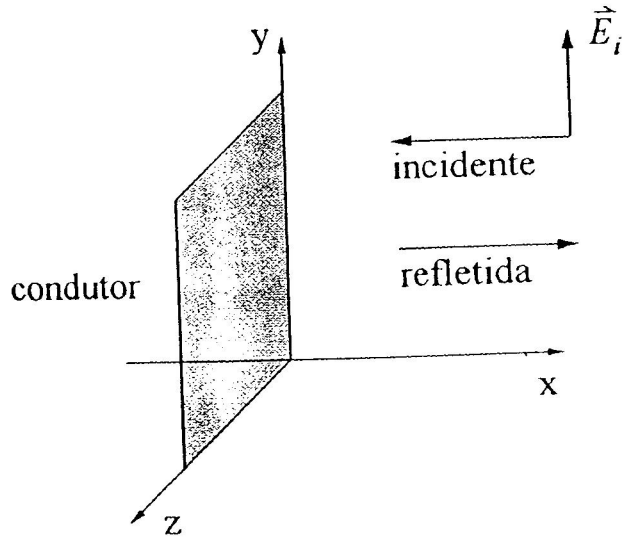
$$-\frac{\partial B}{\partial t} = 2\cdot\frac{E_0}{\sqrt{2}}\beta\sin(\omega t - \beta(x+y))\,\hat{k}$$

Integrando e usando $\beta = \omega/\sqrt{2}\,c$

$$\boxed{B = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\sqrt{2}\,c}(x+y)\right)\hat{k}}$$

Questão 3 – P1 FÍSICA IV 2014

Uma onda eletromagnética plana monocromática com comprimento de onda λ, propagando-se no vácuo no sentido negativo do eixo x, incide perpendicularmente sobre uma superfície metálica perfeitamente refletora, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Escreva a expressão do vetor campo elétrico incidente $\vec{E}_i$, em termos de sua amplitude E_0 e do comprimento de onda λ, sabendo que o campo oscila ao longo da direção y e que asssume seu valor máximo em $x = 0$ no instante $t = 0$. Determine o campo magnético da onda incidente $\vec{B}_i$ a partir de $\vec{E}_i$.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico da onda refletida $\vec{E}_r$ a partir do fato de que o campo elétrico total se anula na superfície do metal. Determine o vetor campo magnético da onda refletida $\vec{B}_r$ a partir de $\vec{E}_r$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a pressão de radiação P_{rad} exercida pela onda sobre a superfície metálica perfeitamente refletora.

a) $E_i = E_0 \cos(Kx + \omega t + \phi)\hat{j}$ ⊕ pois onda vai em $-x$

i) $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = K \cdot c = \frac{2\pi c}{\lambda}$

ii) Se em $x = 0$ e $t = 0$ E_i é máximo $\Rightarrow \phi = 0$

Logo: $\boxed{E_i = E_0 \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x + ct)\right]\hat{j}}$

b) i) Na superfície do condutor o campo total deve ser nulo:

$$E_i(0,t) + E_r(0,t) = \vec{0}$$

Logo

$$\boxed{E_r = -E_0 \cos\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x-ct)\right]\hat{j}}$$

ii) O campo magnético será:

$$B_r = \frac{\hat{i} \times E_r}{c} \Rightarrow B_r = -\frac{E_0}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)\hat{k}$$

c)

$$P_{rad} = 2\langle u \rangle = 2\left\langle \frac{S}{c} \right\rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$