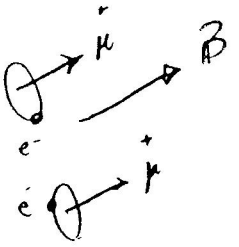
RH 30,30

RESUMO - P3 FÍSICA III 2015

Por Arthur Salles — Resumão Física 3 + Provas

I - Materiais Magnéticos

Certos materiais, devido a propriedades de seus átomos e elétrons, quando são colocados em uma região com campo magnético alteram a intensidade do campo.



Como isso ocorre? Nesses materiais, os elétrons possuem um momento dipolar ($\vec{\mu}$) não nulo que se alinha com o campo externo, intensificando-o

Sendo χ_m a susceptibilidade magnética do material, o campo total será:

$$\mathbb{B}_{total} = \underbrace{\mathbb{B}_0}_{\text{aplicado}} + \underbrace{\mathbb{B}_m}_{\text{devido à magnetização}}$$

$$\boxed{\mathbb{B}_{total} = (1 + \chi_m)\,\mathbb{B}_0}$$

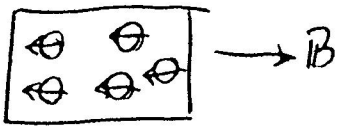
Os materiais magnéticos se classificam em:

1) PARAMAGNÉTICOS : $\chi_m > 0$ → $\mathbb{B}_{total} > \mathbb{B}_0$

2) FERROMAGNÉTICOS : $\chi_m >> 0$ → $\mathbb{B}_{total} >> \mathbb{B}_0$

3) DIAMAGNÉTICOS : $\chi_m < 0$ → $\mathbb{B}_{total} < \mathbb{B}_0$

* Nos materiais diamagnéticos, os dipolos dos elétrons se alinham no sentido oposto a $\mathbb{B}_0$, reduzindo o campo total



* Nos materiais paramagnético o alinhamento é imperfeito, por isso aumenta pouco $\mathbb{B}_{total}$

Outras Formas de equacionar

Há outras formas de escrever $\mathbb{B}$ total, por exemplo

$$\mathbb{B}\,\text{total} = \underbrace{\mathbb{B}_0}_{} + \underbrace{\mathbb{B}_m}_{}$$

$$\mathbb{B}\,\text{total} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$\vec{H}$ = campo magnetizante / intensidade de campo

$\vec{M}$ = magnetização

Mas $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, por definição, por isso se chega:

$$\mathbb{B}\,\text{total} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

$$\mathbb{B}\,\text{total} = \underbrace{\mu_0 \vec{H}}_{\mathbb{B}_0} (1+\chi_m)$$

$$\mathbb{B}\,\text{total} = (1+\chi_m)\,\mathbb{B}_0$$

Definindo a <u>permeabilidade relativa</u> (K_m) do material como: $K_m = (1+\chi_m)$.

Tem-se que:

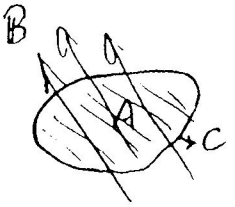
$$\mathbb{B}\,\text{total} = K_m\,\mathbb{B}_0$$

II - A Lei de Faraday : Indução Magnética

" Campos magnéticos variáveis no tempo dão origem a campos elétricos "

Experimentos empíricos comprovaram a validade do enunciado anterior, que foi posteriormente equacionado da seguinte forma :

i) Seja ϕ_B o fluxo do campo magnético ($\mathbb{B}$) por uma superfície A, apoiada no circuito C

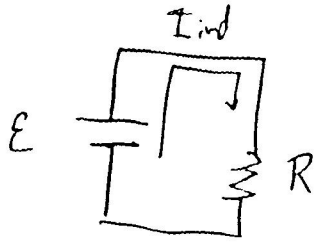


$$\boxed{\phi_B = \int_A \mathbb{B} \cdot \hat{n} \, dA}$$

ii) A variação do fluxo (ϕ_B) gera uma força eletromotriz tal que :

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}}$$

Se houver resistência no circuito, aparecerá uma corrente induzida (I_{ind}) que pode ser facilmente calculada usando lei das malhas :



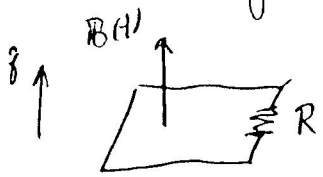
$$\mathcal{E} - R \cdot I_{ind} = 0$$

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Vejamos agora alguns casos em que a Lei de Faraday pode ser usada :

1) <u>Módulo de B variável</u>:

Consideramos uma espira com resistência R imersa em campo magnético: $\mathbb{B}(t) = B_0 e^{-\alpha t} \vec{k}$

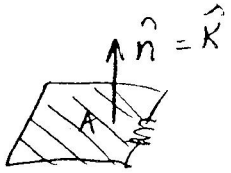


* Note que a direção de $\mathbb{B}$ não muda; apenas seu módulo.

i) Podemos calcular o fluxo:

$$\phi_B = \int_A B(t) \cdot \hat{n} \, dA$$

usamos a superfície plana apoiada em c. A normal pode ser tanto ↑ quanto ↓. Escolho uma



$$\phi_B = \int_A (B_0 e^{-\alpha t} \vec{k}) \cdot \vec{k} \, dA$$

$$\phi_B = B_0 e^{-\alpha t} \int_A dA = B_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{Area}$$

ii) A força eletromotriz será:

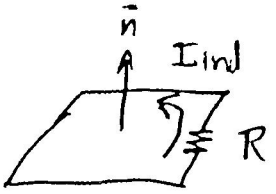
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 e^{-\alpha t} \text{Area}\right) = \alpha B_0 e^{-\alpha t} \text{Area}$$

iii) A corrente induzida será

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

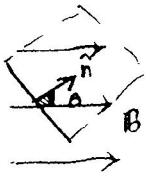
$$\boxed{I_{ind} = \frac{\alpha B_0 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \text{Area}}{R}}$$

iv) Qual o sentido de I_{ind}? Usar regra do saca rolha com a normal adotada. Como achamos I_{ind} positivo, será no sentido dado pela normal:



2) <u>Ângulo entre B e n̂ variável</u>

Neste caso, a espira gira, de modo que o ângulo entre o campo magnético e a normal à superfície varia:



Se: $\theta = \omega t$

Podemos calcular $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \mathbb{B}\cdot\hat{n}\,dA = -\frac{d}{dt}\int_A B\cdot\cos\theta\,dA$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_A B\cos\omega t\,dA = -\frac{d}{dt}\left(B\cos\omega t\ \text{Area}\right)$$

$$\mathcal{E} = B\cdot\text{Area}\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)$$

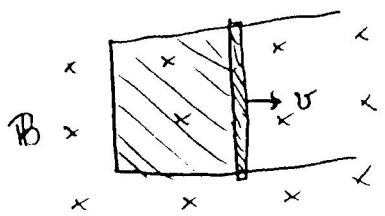
Se tiver resistência: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$$I_{ind} = \frac{B\cdot\text{Area}\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)}{R}$$

3) <u>Área variável</u>:

Este é o caso mais importante. Por isso, veremos com mais calma.

Vamos imaginar uma espira que tem um de seus lados em movimento:

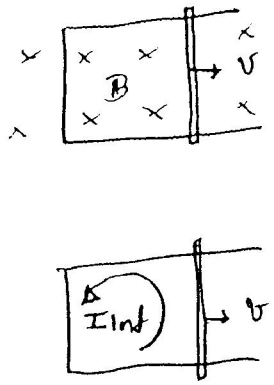


Notamos que a área da espira (parte hachurada) vai variar com o tempo, de forma que o fluxo de B se altera. Assim, sabemos que surgirá uma força eletromotriz induzida e, portanto, corrente.

A primeira pergunta a responder é: "qual o sentido da corrente induzida". Quem nos responde é a Lei de Lentz:

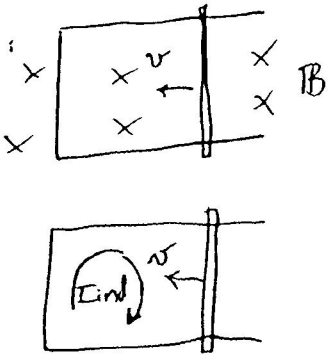
a) <u>Lei de Lenz</u>: "A corrente induzida é tal que o campo magnético produzido por ela se opõe à variação do fluxo externo"

- Caso 1:



Neste caso o fluxo de B aumenta no sentido ⊗ (entrando no plano do desenho). Assim, a corrente induzida deve produzir campo para diminuir o fluxo ⊗, ou seja, deve produzir campo no sentido oposto ⊙. Lembrando da regra do saca-rolha, I deverá ser antihorário

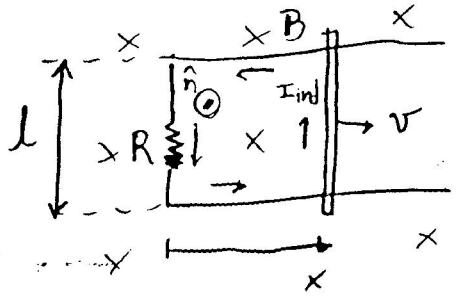
- Caso 2:



Note que neste caso a área diminui. Assim o fluxo em ⊗ diminui. Pela lei de Lentz a corrente induzida deve ser tal que gere um campo que aumente o fluxo em ⊗. Por isso será horária.

Agora podemos calcular o valor da corrente pela Lei de Faraday

b) <u>Lei de Faraday</u>: usamos a normal dada pela regra do saca-rolha, considerando o sentido da corrente dado pela lei de Lentz.



* Por Lentz o fluxo em ⊗ aumenta. Logo a corrente induzida gera campo saindo ⊙

Podemos calcular:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_A \underbrace{\vec{B}\cdot\vec{n}}_{=-B}\, dA = -\frac{d}{dt}(-BA) = B\frac{d}{dt}(lx)$$

$(\vec{B} = -B\vec{k}$ e $\vec{n} = \vec{k})$

a área é: $A = l \cdot x$

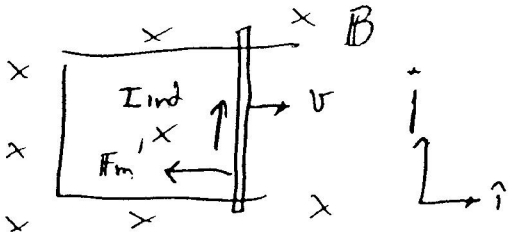
$$\boxed{\mathcal{E} = Blv}$$, pois $v = \frac{dx}{dt}$

Se soubermos a resistência R do circuito, a corrente induzida será: $I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$

c) <u>Força aplicada na barra</u>:

Como a barra é percorrida por corrente e está imersa em campo magnético, surgirá uma força (F_m) devido ao campo dada por:

$$\boxed{F_m = I\vec{l} \times B}$$



No Ex.: Usando $\vec{l}$ no sentido da corrente:

$$F_m = I(l\vec{j}) \times (-B\vec{k})$$

$$F_m = -B \cdot I \cdot l\,\vec{i}$$

Se quiser manter $\vec{v}$ constante, deve aplicar uma força que anule F_m:

$$\boxed{F_{apl} = -F_m}$$ (para $\vec{v}$ cte)

* Se não houver essa força aplicada, note que F_m se opõe a $\vec{v}$, de forma que a barra irá desacelerar, tendendo a $v = 0$.

PARA ESTUDAR : questões das P3 dos anos anteriores :

Q2 2014 ; Q3 2012 ; Q2 2009

Q2 2013 ; Q2 2011

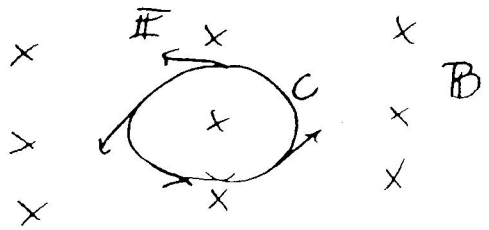
III - Campos Elétricos Induzidos

Vimos no tópico anterior que a variação do campo magnético gera força eletromotriz e, portanto, corrente em um circuito que esteja na região.

Os efeitos da variação de B, contudo, não se limitam a casos em que há um circuito material no local, pois : UMA VARIAÇÃO DE B GERA CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO NO ESPAÇO, independentemente da presença de uma espira.

Como calcular E ? Usamos que :

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{l}}$$



Obs : o campo elétrico que surge não é conservativo, pois essa integral de linha em uma curva fechada não se anula

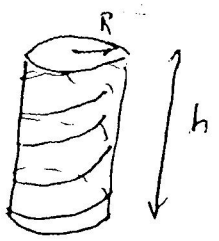
Vamos aprender usando um exemplo de prova

Enunciado: Por um solenoide de raio R, comprimento h e com N espiras, passa uma corrente $I = I_0 \cos(\omega t)$

(a) Calcule o campo elétrico induzido dentro

(b) Calcule o campo elétrico induzido fora

(c) O campo é conservativo?



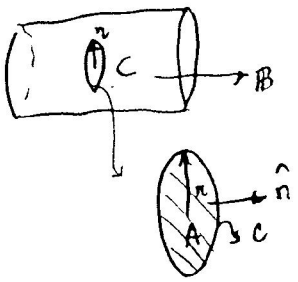
(a) i) Lembrando do que vimos no capítulo sobre lei de Ampere, dentro do solenoide o campo magnético é:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{h}$$

varia no tempo

ii) Com $I = I_0 \cos \omega t \Rightarrow B(t) = \frac{\mu_0 N I_0}{h} \cos(\omega t)$

iii) Aplicamos Faraday para encontrar a f.e.m ($\mathcal{E}$) induzida:



$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_A \underbrace{B \cdot \hat{n}}_{=B}\, dA = -\frac{d}{dt}\left(B \int_A dA\right) = -\frac{d}{dt}\left(B \pi r^2\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 N I_0}{h} \pi r^2 \cos(\omega t)\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\pi r^2 \mu_0 N I_0}{h} \omega \sin(\omega t)$$

iv) Finalmente, podemos determinar o campo elétrico (E):

$$\mathcal{E} = \oint_C E \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi r$$

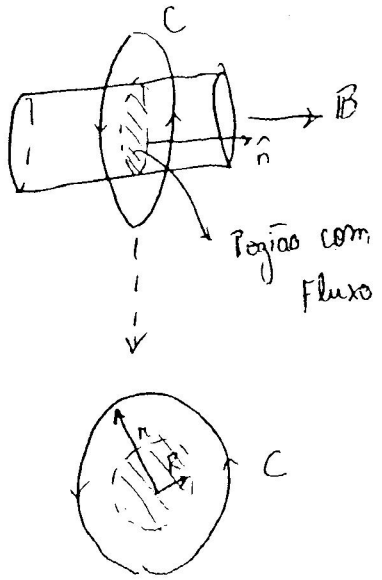
SIMETRIA CILÍNDRICA

$$E = \frac{\mu_0 N r I_0 \omega}{2h} \sin(\omega t)$$

Se quisermos vetor:

$$\boxed{E = \frac{\mu_0 N r I_0 \omega}{2h} \sin(\omega t)\, \hat{\theta}}$$

(b) Para fora do solenoide, note que só há fluxo em uma parte da espira



$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_A \mathbb{B}\cdot\hat{n}\,dA = -\frac{d}{dt}\left(B\,\pi R^2\right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 N I_0 \pi R^2}{h}\cos(\omega t)\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 N I_0 \pi R^2 \omega \sin(\omega t)}{h}$$

Analogamente ao (a): $\mathcal{E} = \oint \mathbb{E}\,d\vec{l} = E\cdot 2\pi r$

$$E = \frac{\mu_0 N R^2 I_0 \omega}{2hr}\sin(\omega t)$$

(c) O campo não é conservativo pois sua integral de linha numa curva fechada (C) é não nula:

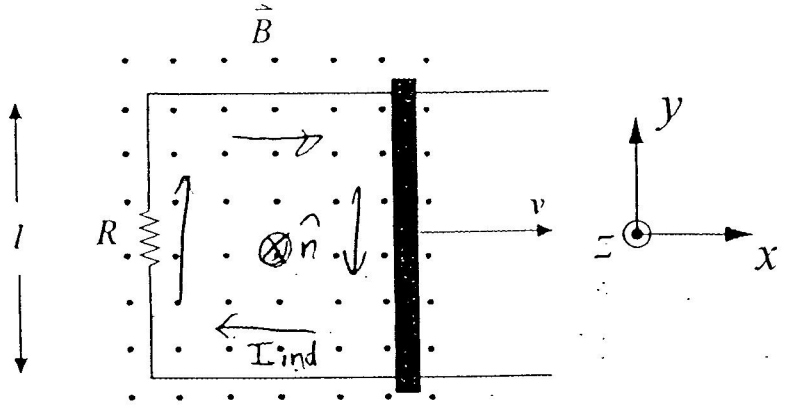
$$\oint_C \mathbb{E}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \neq 0$$

PARA ESTUDAR : P3

Q3 de 2009 } similares ao exemplo
Q3 de 2010 }
Q4 de 2011 - similar Q1 de 2014
Q1 de 2013
Q1 de 2014

Questão 3 - P3 2012

A figura abaixo mostra uma barra condutora de comprimento l, deslizando para a direita, com velocidade constante $\vec{v}$, em contato com um fio, de modo a formar um circuito de resistência R. Também está ilustrado na figura um campo magnético $\vec{B}$, constante e uniforme, saindo da página.



(a) (0,5 ponto) Determine o sentido da corrente induzida no circuito (horário ou anti-horário), justificando sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente induzida I.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor força externa $\vec{F}$ que está sendo aplicada na barra de modo a manter sua velocidade constante.

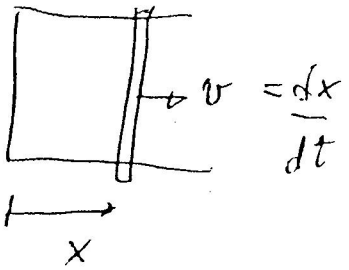
a) Pela Lei de Lenz, a corrente é no sentido HORÁRIO, pois o fluxo do campo magnético está aumentando no sentido $+\vec{k}$. Logo a corrente induzida deve gerar campo no sentido oposto $(-\vec{k})$

b) Por Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot\vec{n}\,dA = -\frac{d}{dt}\int_A \underbrace{(B\vec{k})\cdot(-\vec{k})}_{=-B}\,dA = B\frac{d}{dt}\int_A dA$$

$\hat{n} = -\vec{k}$ pela regra do saca rolha, usando o sentido de I_{ind}

$$\mathcal{E} = B \frac{d}{dt}(lx) = Blv$$

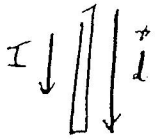


Logo a corrente induzida é:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\boxed{I = \frac{Blv}{R}}$$

c) A força magnética sobre a barra é:



$$\mathbb{F}_m = I\vec{l} \times \mathbb{B}$$

$$\mathbb{F}_m = I(-l\vec{j}) \times BK$$

$$\mathbb{F}_m = -BIl\,\hat{i}$$

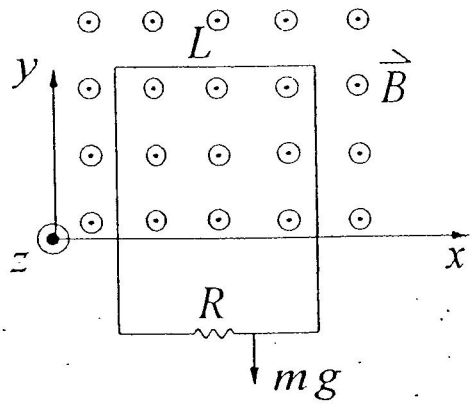
Logo, para ter velocidade constante

$$\mathbb{F}_{ap} = -\mathbb{F}_m = BIl\,\hat{i}$$

$$\boxed{\mathbb{F}_{ap} = \frac{B^2 l^2 v}{R}\,\hat{i}}$$

Questão 2 - P3 2009

Uma espira retangular de largura L, resistência R e massa m está caindo, sob a ação do campo gravitacional, em uma região onde há um campo magnético uniforme como indicado na figura abaixo (não há campo magnético abaixo do eixo x).

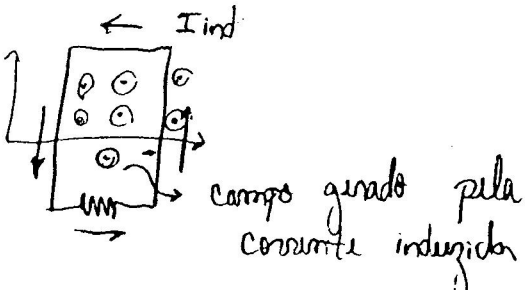


(a) (0,5 ponto) Usando a lei de Lenz, explique qual é o sentido da corrente produzida na espira (horário ou anti-horário).

(b) (1,0 ponto) Obtenha a corrente induzida na espira em função da velocidade instantânea de queda $v = dy/dt$. Note que $v < 0$.

(c) (1,0 ponto) Determine a força magnética sobre a espira (módulo, sentido e direção). Suponha que antes de sair totalmente da região com campo magnético a espira atinja uma *velocidade limite* v_ℓ (movimento com aceleração nula). Escreva a equação de movimento da espira e calcule a velocidade limite v_ℓ.

a) Conforme a espira se desloca, o fluxo na direção e sentido ($+\vec{k}$) diminui. Assim, pela Lei de Lenz, a corrente induzida é tal que AUMENTA o fluxo nesse sentido (ou seja, gera campo em $+\vec{k}$). Logo, essa corrente deve ser no sentido ANTI-HORÁRIO.

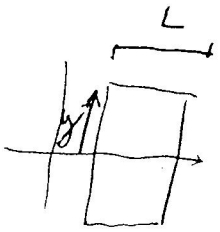


B

b) Por Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int \mathbb{B}\cdot\hat{n}\, dA \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{B} \text{ e } \hat{n} \text{ são} \\ \text{paralelos}}}{=} -\frac{d}{dt}(BA) \Rightarrow \mathcal{E} = -B\frac{d}{dt}(A)$$

Mas quem é a área? $A = Ly$

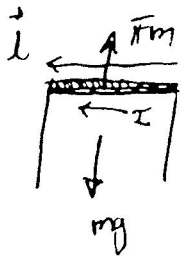


$$\therefore \mathcal{E} = -\frac{Bd}{dt}(Ly) = -BL\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=v}$$

$$\mathcal{E} = -B\cdot l\cdot v$$

Logo a corrente induzida é: $I_{ind.} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I_{ind} = -\frac{Blv}{R}}$

c) Sobre a parte da espira imersa no campo surgirá força magnética, pois está sendo percorrida por corrente. Nas laterais as forças se anulam e sobra apenas $\mathbb{F}_m$ na parte superior



i) Calculamos: $\mathbb{F}_m = I\vec{l}\times B$

$$\mathbb{F}_m = -\frac{Blv}{R}(-l\hat{i})\times B\vec{k}$$

$$\mathbb{F}_m = -\frac{B^2l^2v}{R}\hat{j}$$

ii) No limite a aceleração é nula, logo as forças se cancelam:

$$\mathbb{F}_m + m\vec{g} = 0$$

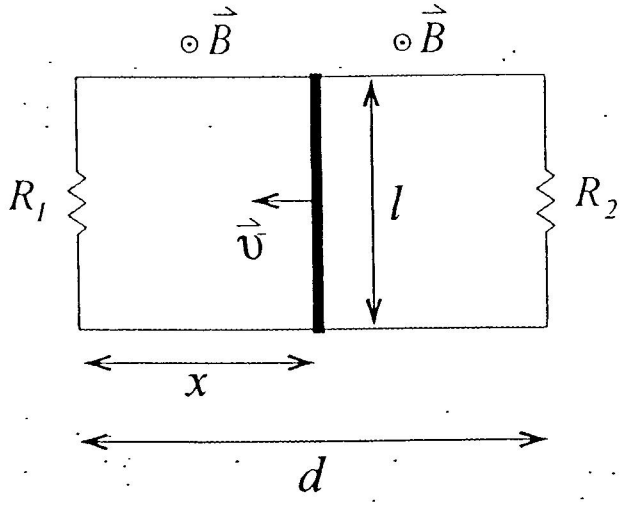
$$-\frac{B^2L^2v}{R}\hat{j} - mg\hat{j} = 0$$

$$\boxed{v_{lim} = -\frac{mgR}{B^2L^2}}$$

(4)

Questão 2 - P3 2011

Uma barra condutora perfeita (com resistência nula) desliza sem atrito com velocidade v, para a esquerda, sobre dois fios condutores também perfeitos. Dois resistores R_1 e R_2 estão conectados às extremidades dos dois fios, formando o circuito mostrado na figura. A distância entre os fios horizontais é l, entre os resistores é d, e da barra ao resistor R_1 é x. Um campo magnético uniforme e constante de intensidade B é aplicado perpendicularmente ao circuito, para fora da página. Ao calcular o fluxo magnético através de qualquer superfície, adote o vetor normal à superfície, na mesma direção e sentido do campo magnético.



(a) (0,5 ponto) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente na porção do circuito à direita da barra justificando a sua resposta por meio da lei de Lenz.

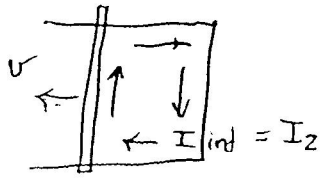
(b) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da porção do circuito à direita da barra. Determine a corrente que atravessa o resistor R_2 por meio da lei de Faraday.

(c) (0,5 ponto) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente na porção do circuito à esquerda da barra justificando a sua resposta por meio da lei de Lenz.

(d) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da porção do circuito à esquerda da barra. Determine a corrente que atravessa o resistor R_1 por meio da lei de Faraday.

(e) (0,5 ponto) Calcule a intensidade e a direção da força magnética exercida sobre a barra. Essa força é de aceleração ou de frenagem?

a) No circuito da direita, o fluxo aumenta na direção ⊙. Logo a corrente induzida deve gerar campo entrando (⊗). Assim conclui-se que I_{ind} nesse circuito tem sentido horário



b) $\phi_B = \int_A \mathbb{B} \cdot \hat{n}\, dA = \int_A (B\vec{k}) \cdot \vec{k}\, dA = \int_A B\, dA \underset{B\ cte}{=} B \int_A dA = B \cdot A$

Mas a área é: $A = l\,(d-x)$

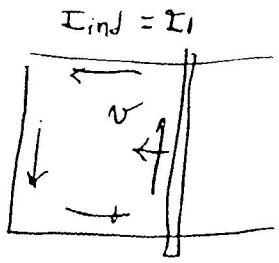
$\Rightarrow \boxed{\phi_B = B \cdot l\,(d-x)}$

Logo: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\phi_B}{dt} = -Bl \dfrac{d}{dt}(d-x) = -Blv$

$\dfrac{dx}{dt} = -v$ (pois se x aumenta v é negativo)

Assim: $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{-Blv}{R_2}$

c) No circuito da esquerda o fluxo em ⊙ diminui, logo a corrente induzida gera campo saindo ⊙. Portanto, tem sentido anti horário



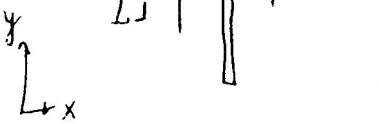
d) Analogamente:

i) $\phi_B = \oint \vec{B} \cdot \hat{n} \, dA = B \cdot A \Rightarrow \boxed{\phi_B = B l x}$

ii) $\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(B l x) = B l \underbrace{\left(\frac{-dx}{dt}\right)}_{v} = B l v$

iii) $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{B l v}{R_1}}$

e) i) Temos que considerar as correntes dos 2 circuitos:



$I = |I_1| + |I_2| = B l v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

$I = \frac{B l v (R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2}$

ii) $F_m = I \vec{l} \times B$

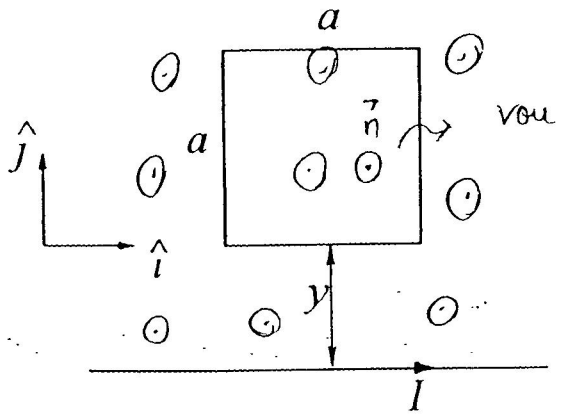
$F_m = I \, l \vec{j} \times B \vec{k}$

$F_m = B \cdot I \cdot l \, \vec{i}$

$\boxed{F_m = \frac{B^2 l^2 v (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \vec{i}}$ $\Rightarrow$ É uma Força de frenagem, pois se opõe a $\vec{v}$

Questão 2 - P3 2014

Uma espira quadrada de lado a e resistência R está sobre uma mesa, a uma distância y de um fio muito longo sobre o eixo x que transporta uma corrente I, conforme mostra a figura. O módulo do campo produzido pelo fio é $B = \mu_0 I/(2\pi r)$, onde r é a distância até o fio.



vou adotar saindo

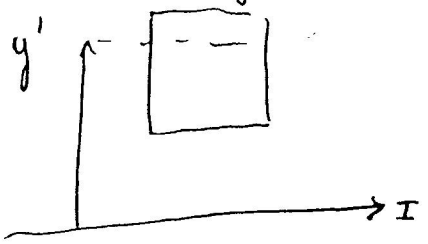
(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético, produzido pelo fio, através da espira.

(b) (1,0 ponto) A espira é movimentada na direção y, afastando-se do fio com velocidade $v = dy/dt$. Use a lei de Lenz para determinar o sentido da corrente induzida na espira (horário ou anti-horário), justificando sua resposta. Calcule a corrente induzida i.

(c) (0,5 ponto) Determine o valor da corrente induzida se a espira é movimentada para a direita (direção x) mantendo constante a distância y até o fio.

a) Ao contrário da maioria dos exercícios, B não tem o mesmo valor em todos os pontos da área apoiada na espira

Sendo y' a distância de cada ponto ao fio



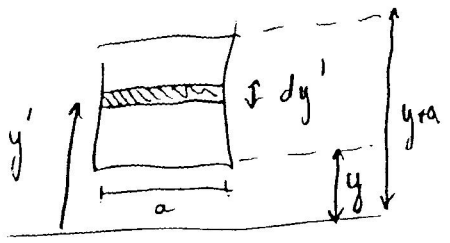
o campo em cada ponto é:

$$\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y'} \vec{k}$$

Agora integramos:

$$\phi_B = \int_A \underbrace{\mathbb{B} \cdot \hat{n}}_{\text{paralelos}} \, dA = \int_A B \, dA = ?$$

Vamos dividir em pedaços com a mesma distância ao fio



$$dA = a\,dy'$$

$$\Rightarrow \phi_B = \int_y^{y+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi y'} \cdot a\,dy' = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln y' \Big|_y^{y+a}$$

$$\boxed{\phi_B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{y+a}{y}\right)}$$

b) i) Notamos que quanto mais distante do fio menor é o fluxo na direção $\odot$. Logo a corrente induzida é ANTI HORÁRIA, de forma a gerar campo no sentido $\odot$ $(+\hat{k})$

ii) A Força eletromotriz induzida é:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{y+a}{y}\right)\right]}_{\text{mais fácil derivar por } y \Rightarrow \text{ multiplica por } \frac{dy}{dy}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dy}\left[\ln\left(\frac{y+a}{y}\right)\right] \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\frac{\cancel{y}}{y+a}\right)\left(\frac{y-(y+a)}{y^{\cancel{2}}}\right)\underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)}_{v}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi y(y+a)}$$

Logo a corrente induzida é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi y (y+a) R}}$$

c) Neste caso o fluxo ϕ_B não se altera, logo:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = 0$$

Assim, a corrente induzida é nula.

Física III - 4320301

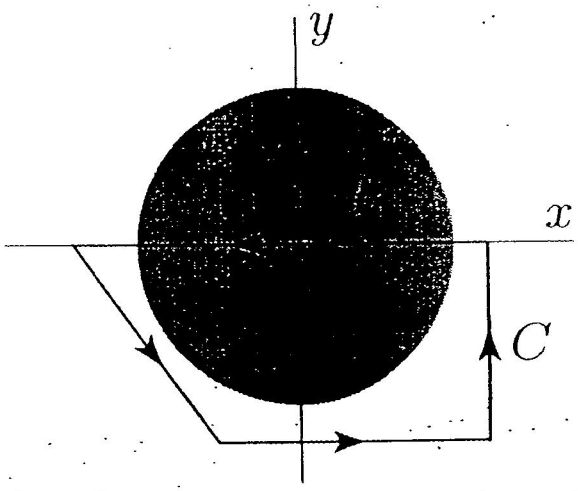
~~Escola Politécnica - 2014~~

~~GABARITO DA P3~~

25 de junho de 2014

Questão 1 - P3 2014

O campo magnético em todos os pontos de uma região cilíndrica de raio R é uniforme e direcionado para dentro da página, variando com o tempo segundo $B = Kt$, onde K é uma constante positiva.



(a) (0,5 ponto) Determine a integral $\oint \vec{E}.d\vec{l}$ do campo elétrico ao longo do circuito C indicado na figura.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ fora da região cilíndrica de raio R.

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ dentro da região cilíndrica de raio R.

(a) $\oint E \cdot \vec{dl} = \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int_A B \cdot \hat{n}\, dA$

Adotando $\vec{n} = \vec{k}$, temos $B \cdot \hat{n} = -B = -Kt$

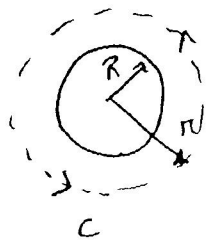
$\Rightarrow \oint E \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_A -Kt\, dA = \frac{d}{dt} Kt \cdot \left(\frac{\pi R^2}{2}\right)$

SÓ HÁ FLUXO NA REGIÃO DO CILINDRO

Derivando:

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{K\pi R^2}{2}}$$

(b)



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int B\cdot\hat{n}\,dA$$

HÁ FLUXO NA ÁREA πR^2 INTERIOR AO CILINDRO

$$E\cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}\left[-B\pi R^2\right]$$

$$E\cdot 2\pi r = \frac{d}{dt}\left[Kt\,\pi R^2\right]$$

$$E\cdot 2\cancel{\pi} r = K\cancel{\pi} R^2$$

$$E = \frac{KR^2}{2r}$$

Como adotamos $\vec{n} = \vec{k}$, o sentido do campo é anti-horário:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{KR^2}{2r}\,\hat{\theta}}$$

(c)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int B\cdot\vec{n}\,dA$$

HÁ FLUXO em todo πr^2

$$E\cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}\left[-B\pi r^2\right]$$

$$E\cdot 2\pi r = \frac{d}{dt}\left[Kt\pi r^2\right]$$

$$E = \frac{Kr}{2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Kr}{2}\,\hat{\theta}}$$

Física III - 4320301

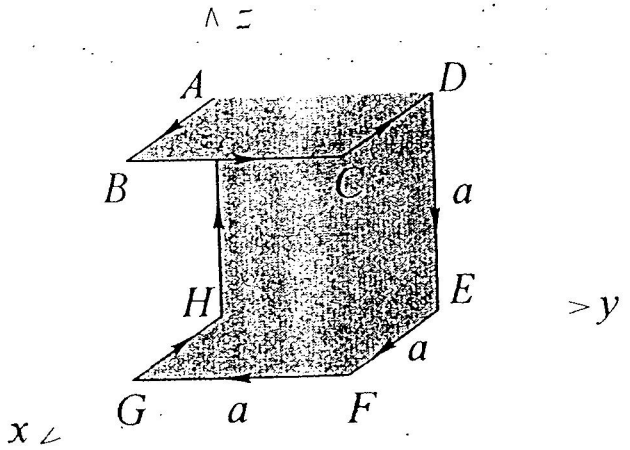
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA P3

20 de junho de 2013

Questão 1 - P3 2013

Considere uma superfície S formada por três quadrados de lado a: $ABCD$, $DEHA$ e $EFGH$, como é mostrado na figura. O quadrado $ABCD$ é paralelo ao plano xy. Na região da superfície S existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$.

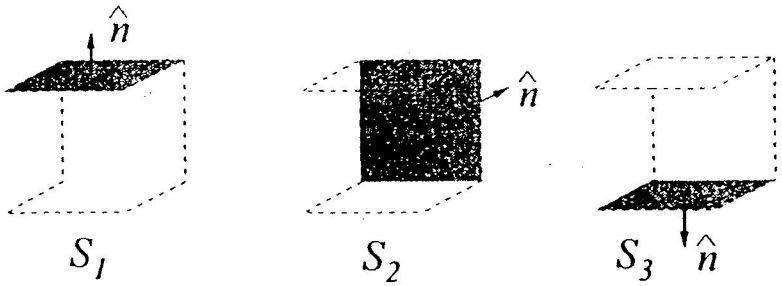


(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo magnético através da superfície S para $\vec{B} = B_z(t)\hat{k}$.

(b) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da superfície S para $\vec{B} = B_x(t)\hat{\imath}$.

(c) (1,0 ponto) Considere $\vec{B} = B_x(t)\hat{\imath}$ com $B_x(t) = B_0\cos(wt)$. Calcule a integral de linha do campo elétrico ao longo do caminho fechado $\gamma \equiv ABCDEFGHA$ na fronteira de S percorrido no sentido indicado na figura.

a) Podemos dividir em 3 superfície com suas respectivas normais dadas pela orientação da curva.



23

Se $\mathbb{B}$ tem direção $\vec{k}$ haverá fluxo em S_1 e S_3

$$\phi_B = \int_{S_1} \mathbb{B}\cdot\hat{n}\, dA + \int_{S_3} \mathbb{B}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$\phi_B = \int_{S_1} B_z \vec{k}\cdot\vec{k}\, dA + \int_{S_3} B_z \vec{k}\cdot(-\vec{k})\, dA$$

$$\phi_B = B_z \int_{S_1} dA - B_z \int_{S_3} dA = B_z a^2 - B_z a^2$$

$$\boxed{\phi_B = 0}$$

b) Se $\mathbb{B}$ tem direção x, só há fluxo por S_2:

$$\phi_B = \int_{S_2} \mathbb{B}\cdot\hat{n}\, dA = \int_{S_2} B_x\hat{i}\cdot(-\hat{i})\, dA$$

$$\phi_B = -B_x \int_{S_2} dA$$

$$\boxed{\phi_B = -a^2 B_x}$$

c) $$\oint_\gamma \vec{E}\cdot dl = -\frac{d}{dt}\phi_B = -\frac{d}{dt}\left(-a^2 B_x(t)\right)$$

$$\oint_\gamma \mathbb{E}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\left(a^2 B_0 \cos wt\right)$$

$$\boxed{\oint \mathbb{E}\cdot d\vec{l} = -a^2 w B_0 \sin(wt)}$$

IV - Auto - Indutância

Veja só que curioso: ao colocar corrente em um circuito, acabamos gerando campo magnético (e, portanto, fluxo magnético)

$I(t)$
$\Downarrow$
$B(t)$
$(\phi_B(t))$

Se houver variação dessas grandezas, surgirá uma corrente induzida que tenta anular aquela corrente que colocamos no circuito

$\Downarrow$ variando
$\mathcal{E}_{ind}$
(I_{ind})

Para medir a relação entre o fluxo do campo e a corrente que colocamos no circuito usamos:

$$\boxed{\phi_B = L \cdot I(t)}$$

Em que L é a <u>auto-indutância</u> do circuito

Como encontramos L?

1) Calcular o campo magnético gerado por I
2) Calcular o fluxo desse campo no circuito
3) Calcular $L = \phi_B / I$

Obs: se pedir energia armazenada, usar: $\boxed{U = \frac{LI^2}{2}}$

Vejamos como se faz usando exemplos de prova

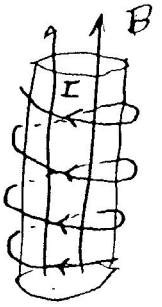
PARA ESTUDAR		
Solenoide	Q3 2014 Q1 2006	
Toroide	Q2 2010 Q1 2009 (a,b)	Q1 2007

Questão 3 — P3 2014

Um solenóide longo de comprimento h e raio R ($h >> R$) tem um enrolamento com N espiras. O módulo do campo no interior do solenóide é $B = \mu_0 N I / h$.

(a) (1,5 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide.

(b) (1.0 ponto) Repita o cálculo do item (a) para o caso em que o solenoide está preenchido com um material de suscetibilidade χ_m.



a) i) Calcular o campo gerado pelo solenoide

Já foi dado: $B = \frac{\mu_0 N I}{h}$

ii) Calcular o fluxo total no solenoide

(a) Primeiro calcula para uma espira

$$\phi_{espira} = \int B \cdot \hat{n}\, dA = B \cdot A$$

$$\phi_{espira} = \frac{\mu_0 N I}{h} \pi R^2$$

(b) Agora para o solenoide (N espiras)

$$\phi_{total} = N \phi_{espira} = \frac{\mu_0 N^2 I}{h} \pi R^2$$

iii) Podemos calcular L:

$$L = \frac{\phi_{total}}{I} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

b) Se o solenóide estiver preenchido por material magnético, o campo magnético total se altera

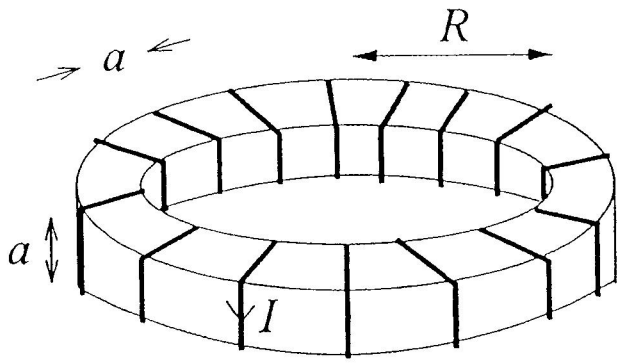
$$B' = (1 + \chi_m) B$$

Logo ϕ espira, ϕ total e L serão multiplicado por esse fator $(1+\chi_m)$

$$\boxed{L' = \frac{(1+\chi_m)\,\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

Questão 2 - P3 2010

Uma bobina toroidal de raio interno R e seção reta quadrada de lado a, com $a << R$, possui N espiras percorridas por uma corrente I.

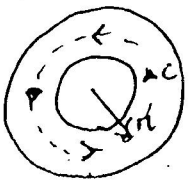


(a) (0.5 ponto) Calcule o vetor campo magnético no interior do toróide.

(b) (1.0 ponto) Calcule a auto-indutância da bobina supondo que o módulo do campo magnético seja aproximadamente constante dentro da bobina.

(c) (1.0 ponto) Suponha que a bobina toroidal seja preenchida com um núcleo de um material magnético com permeabilidade magnética relativa $K_m \equiv \mu/\mu_0 = 500$. Calcule os novos valores do vetor campo magnético no seu interior e da auto-indutância.

a) Vamos refazer o que vimos em lei de Ampère



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{"Fura"}}$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

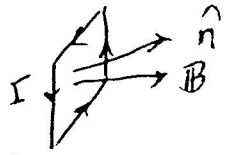
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\theta}}$$

b) Supomos que a é suficientemente pequeno, de forma que para todo r entre R e $(R+a)$

$$r \approx R$$

Logo usamos $\mathbb{B} = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi R}\hat{\theta}$

i) Fluxo por uma espira



$$\phi_{espira} = \int \mathbb{B}\cdot\hat{n}\, dA$$

$$\phi_{espira} = \underset{\substack{\uparrow \\ B\ cte}}{B}\cdot\int dA = B\cdot A = Ba^2$$

ii) Fluxo total nas N espiras

$$\phi_{total} = N\phi_{espira} = NBa^2 = \frac{N^2\mu_0 I a^2}{2\pi R}$$

iii) Calcula a auto-indutância:

$$L = \frac{\phi_{total}}{I} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R}}$$

c) Se $\mu = 500\,\mu_0$, substituímos em L $\mu_0 \to 500\mu_0 = \mu$

$$\boxed{L' = (500\,\mu_0)\frac{N^2 a^2}{2\pi R}}$$

P3

Física III

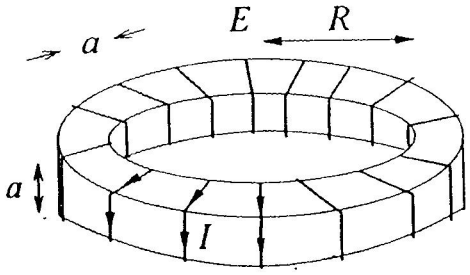
Escola Politécnica - 2008

FGE 2203 - GABARITO DA P3

3 de julho de 2008

Questão 1 - P3 2008

Na figura vemos uma bobina toroidal de seção reta quadrada de lado a e raio interno R. Ela possui um enrolamento com N espiras arranjadas de forma compacta e uniforme. A corrente que passa pelo enrolamento da bobina é I.



(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o campo $\vec{B}_0(r)$ no interior da bobina, onde r é a distância a partir do eixo central de simetria da bobina (E).

(b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo $\vec{B}_0(r)$ através de uma espira e a auto-indutância L da bobina.

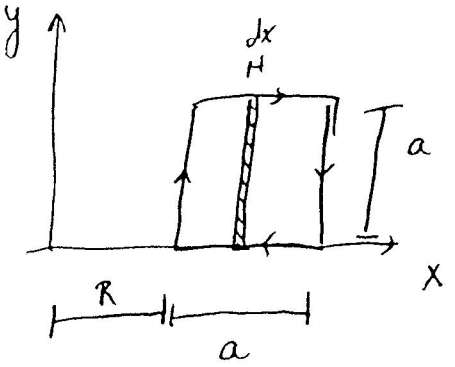
(c) (0,5 ponto) Se a bobina estivesse preenchida com um material magnético de susceptibilidade χ_m, qual seria o valor do campo magnético dentro da bobina?

(a) Como vimos na Q3 de 2014; pela Lei de Ampere

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

30

b) i) Através de uma espira temos:



$$\phi_{espira} = \int \underbrace{B_0 \cdot \hat{n}}_{\text{paralelos}} \, dA = \int B \, dA$$

$$\phi_{espira} = \int_R^{R+a} \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi x} \right) (a\,dx)$$

$$\phi_{espira} = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln x \Big|_R^{R+a}$$

$$\phi_{espira} = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)$$

ii) O fluxo total será:

$$\phi_B = N \cdot \phi_{espira}$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)$$

iii) Logo a auto-indutância é:

$$L = \frac{\phi_B}{I} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)}$$

c) O novo campo magnético será:

$$B = (1 + \chi_m) B_0$$

$$\boxed{B = \mu_0 (1 + \chi_m) \frac{N I}{2\pi r} \hat{\theta}}$$