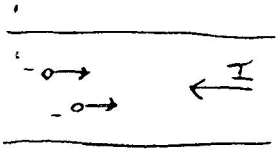
Física III - Resumo para a P2 - Arthur Salles

I - Corrente e Resistência Resumo - 5,40

O movimento de cargas elétricas em um meio condutor gera uma corrente elétrica (I).



← Por convenção, a corrente é indicada no sentido do movimento das cargas positivas

Por definição, a corrente é dada por:

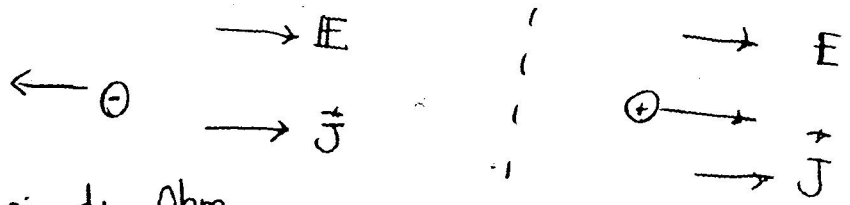
$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad [I] = A$$

Ou seja, I a taxa com que a carga é transferida dentro do material.

A. Densidade de Corrente: ao contrário da corrente (I), a densidade de corrente ($\vec{J}$) é um vetor, cujo módulo é dado por:

$$\boxed{J = \frac{I}{A}} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{corrente} \\ \rightarrow \text{Área da seção transversal} \end{matrix} \qquad [J] = A/m^2$$

O sentido e a direção de $\vec{J}$ são os mesmos dos do campo elétrico (portanto, tem sentido contrário ao movimento dos elétrons)



B. Lei de Ohm: para materiais ditos lineares, há uma relação linear entre o campo (E) e a densidade de corrente ($\vec{J}$), dada pela Lei de Ohm:

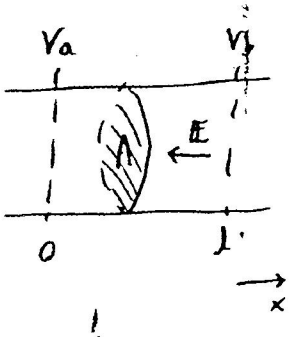
$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

$\sigma \rightarrow$ condutividade do material

Se aplicarmos isso a um fio condutor, chegamos à conhecida equação:

$$V = R \cdot I$$

Como? Vejamos:



Tomamos um fio condutor com campo elétrico $\vec{E}$ constante. Lembrando da P3, a diferença de potencial entre A e B $(V_b - V_a)$ é dada por:

$$V = V_b - V_a = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l^0 (-E\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = \int_l^0 -E \cdot dl = E \cdot l$$

Ou: $E = \frac{V}{l}$

Mas sabemos $\begin{cases} J = \sigma E \\ J = \frac{I}{A} \end{cases} \Rightarrow \sigma E = \frac{I}{A}$

$$\sigma \frac{V}{l} = \frac{I}{A}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \; I}$$

Ou, usando que $\rho = \frac{1}{\sigma}$ (ρ = resistividade do material)

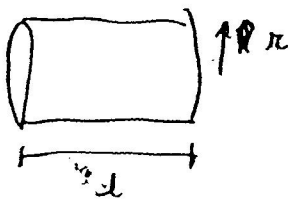
$$\boxed{V = \left(\rho \frac{l}{A}\right) I}$$

Essa é a resistência do material:

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{A}} \qquad [R] = \Omega \text{ (ohm)}$$

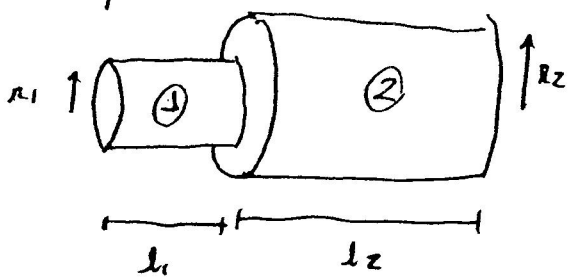
$$\Rightarrow V = R \cdot I$$

C. <u>Calculando Resistências</u>: a equação $R = \rho \frac{l}{A}$ permite calcular resistências para corpos de área constante. Por exemplo



$$R = \rho \cdot \frac{l}{(\pi r^2)}$$

Para corpos em que a área varia, temos que dividir. Por exemplo:



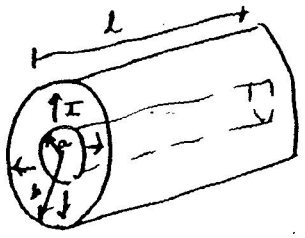
Calculamos: $R = R_1 + R_2$

$$R = \rho \frac{l_1}{A_1} + \rho \frac{l_2}{A_2}$$

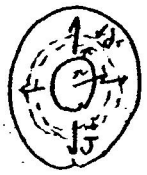
$$R = \rho \left(\frac{l_1}{\pi r_1^2} + \frac{l_2}{\pi r_2^2} \right)$$

Se, entretanto, não tiver só duas ou três áreas diferentes, fazer essa divisão fica impraticável.

Um exemplo muito comum na prova é um resistor cilíndrico em que a corrente flui de dentro para fora (ou vice-versa), i não de uma base à outra



Nesses casos, temos que dividir em elementos concêntricos e integrar:



Note que a área transversal varia, de $(2\pi a)\cdot l$ até $2\pi b)\cdot l$

Para esse pedacinho, temos:

$$dR = \rho \cdot \frac{dr}{A(r)} \quad \leftarrow \text{Comprimento na direção de } J \text{ (ou } I\text{)} \quad \leftarrow \text{Área}$$

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r \cdot l}$$

Integrando: $R = \int dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

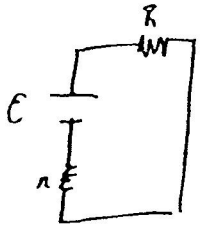
Obs: se dar a ddp, pode calcular a corrente por:

$$I = \frac{V}{R}$$

(*) Exercícios: ver questões 2) P2 2012
1) P1 2013
1) P1 2014

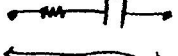
Obs: Força eletromotriz e Circuitos

Está no programa da matéria a discussão sobre circuitos com resistores e fontes de força eletromotriz (f.e.m)



Não costuma cair em prova, mas vale a pena tirar a poeira dos conhecimentos do cursinho/colégio.

* Lei das malhas: $I\Delta r = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - rI - RI = 0$
* Potência consumida no resistor $\Rightarrow$ $Pot = RI^2$
* Potência fornecida pela fonte $\Rightarrow$ $Pot = VI = (\mathcal{E} - rI)\cdot I = \mathcal{E}I - rI^2$



I - Campo Magnético e seus magníficos efeitos

O campo magnético ($\mathbb{B}$) pode ser gerado por um material magnético ("ímã") ou por uma corrente elétrica, como veremos mais adiante (Lei de Ampère). Por enquanto, vamos nos contentar em estudar os efeitos do campo magnético.

A. Para uma partícula carregada

Já vimos que sobre uma partícula de carga q imersa em um campo elétrico $\mathbb{E}$ surge uma força eletrostática:

$$\mathbb{F}_E = q \cdot \mathbb{E}$$

Agora, para a mesma carga em um campo magnético $\mathbb{B}$, irá aparecer uma força magnética dada por:

$$\boxed{\mathbb{F}_B = q\, \vec{v} \times \mathbb{B}}$$

Em que $\vec{v}$ é a velocidade da carga.

Obs1: a força magnética é nula se a carga está parada ($\vec{v} = 0$)

Obs2: a força magnética não realiza trabalho sobre a carga, pois é sempre ortogonal a $\vec{v}$ (e portanto ao seu deslocamento).

Obs3: unidade: $[B] = T$ (Tesla) ou G (Gauss)

$$* \; 1T = 10^4 G$$

(*) Dica de Exercício: 2 da PZ de 2011

B. Efeitos sobre um fio

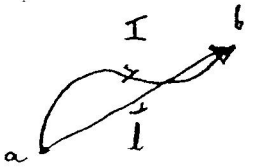
Se tivermos um fio, pelo qual passa corrente, imerso em um campo magnético $\mathbb{B}$, surgirá uma força magnética dada por:

$$\boxed{\mathbb{F}_B = I \int_{\text{fio}} d\vec{l} \times \mathbb{B}}$$

Para o caso especial de $\mathbb{B}$ uniforme:

$$\mathbb{F}_B = I\, \vec{l} \times \mathbb{B}$$

$\vec{l}$: vetor entre os extremos do fio em linha reta, no sentido da corrente



C. Espira em campo magnético uniforme

No caso especial de uma espira (fio fechado), em um campo $\mathbb{B}$ uniforme:

$$\mathbb{F}_B = I \oint d\vec{l} \times \mathbb{B} = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \mathbb{B}$$

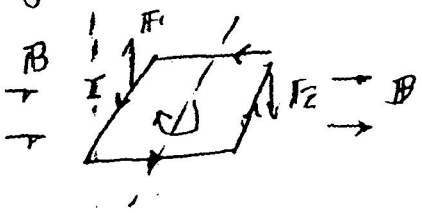
$\mathbb{B}$: cte

$\oint d\vec{l} = 0$ (I fechado)

$$\boxed{\mathbb{F}_B = 0}$$

Ou seja, numa espira, a força total gerada por $\mathbb{B}$ é nula.

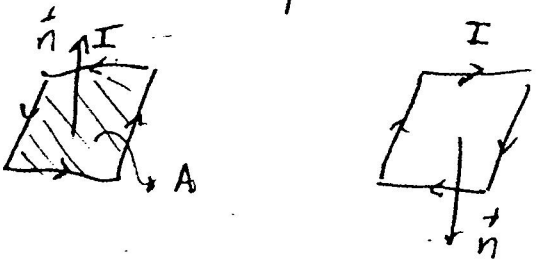
Apesar da força total ser nula, a espira pode girar devido ao campo magnético



O torque que faz a espira girar pode ser calculado por:

$$\vec{\tau} = I \cdot A \cdot \hat{n} \times \vec{B}$$

Em que $\hat{n}$ é a normal à área da espira dada pela regra da mão direita usando o sentido da corrente. Por exemplo



* Por vezes, o enunciado pede para calcular o momento de dipolo magnético ($\vec{\mu}$) da espira. Que nada mais é do que:

$$\vec{\mu} = I \cdot A \cdot \vec{n}$$

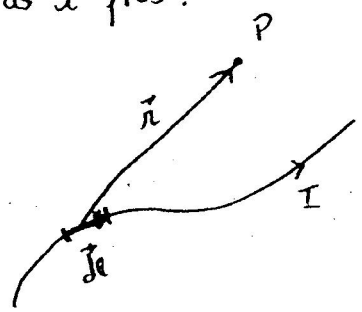
De modo que: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times B$

(*) Dica: Fazer ex 3 da P2 de 2011

IV - Cálculo do Campo Magnético : Biot - Savat

O que gera campo magnético ($\vec{B}$)? Cargas em movimento. Assim, um Fio percorrido por corrente gera campo magnético em seu entorno.

A Lei de Biot - Savat permite calcular $\vec{B}$ e será usada para espiras e fios.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$ é o campo gerado pelo pedacinho de fio $\vec{dl}$

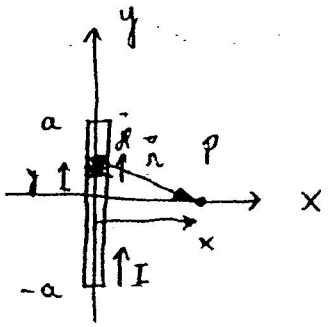
então, para o fio todo:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Ou ainda, se trocarmos $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$

Em que μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2$)

Exemplo:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{Fio} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Mas $\vec{dl} = dy\,\vec{j}$ (no sentido da corrente)

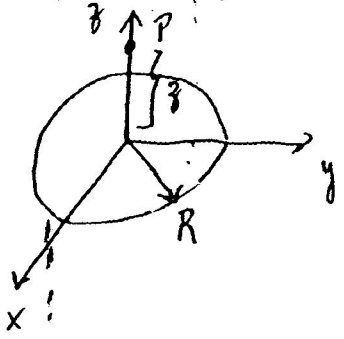
$\vec{r} = x\vec{i} - y\vec{j} \quad \therefore \quad \vec{dl} \wedge \vec{r} = -dy \times \vec{k}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-a}^{a} \frac{-dy \times \vec{k}}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = -\frac{\mu_0 I x \vec{k}}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}}$$

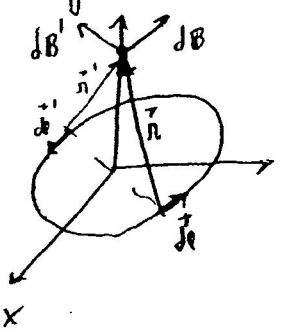
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I x \vec{k}}{4\pi} \left(\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \right)_{-a}^{a}$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi \times \sqrt{x^2+a^2}}}$$

Exemplo: Espira de Corrente ; ponto no eixo de simetria



i) Analisando a simetria, vemos que as contribuições dB se cancelam nas direções x e y, sobrando apenas em $\hat{k}$.

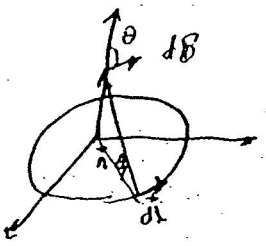


Lembrando que $d\vec{B}$ tem a direção de $d\vec{l} \times \vec{r}$, sabemos que é ortogonal ao plano formado por $d\vec{l}$ e $\vec{r}$.

ii) Tomando só a componente em z de dB:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, \| d\vec{l} \times \vec{r} \|}{r^3} \cos\theta \, \hat{k}$$

FIGURA



Mas: $\| d\vec{l} \times \vec{r} \| = \| d\vec{l} \| \, \| \vec{r} \| \operatorname{sen} \theta_{d\vec{l}, \vec{r}}$

$\theta_{d\vec{l}, \vec{r}} = 1 \, (d\vec{l} \perp \vec{r})$

$\| d\vec{l} \times \vec{r} \| = dl \cdot r$

iii) Integrando:

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{espira}} \frac{dl \cdot r}{r^3} \cos\theta \, \hat{k}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos\theta \, \hat{k} \underbrace{\int_{\text{espira}} dl}_{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\cos\theta \, R}{r^2} \hat{k}$$

Mas: $r^2 = R^2 + z^2$

$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{k}}$$

Exercícios { Q3 : PZ 2014
Q4 : PZ 2013 I
Q3 : PZ 2013

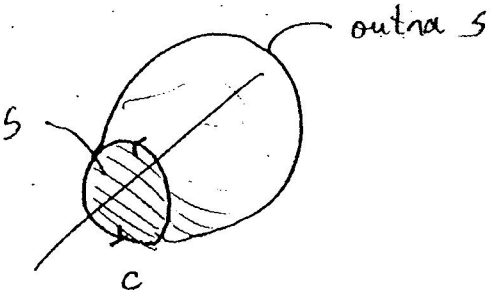
V - A Lei de Ampere

Uma forma alternativa de calcular o campo B é usada em casos em que há simetria. Vimos aqui todos os casos que costumam cair em prova.

A Lei de Ampere diz que se tomarmos uma curva fechada C e qualquer superfície aberta S com bordo C:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

I: corrente que "fura" S



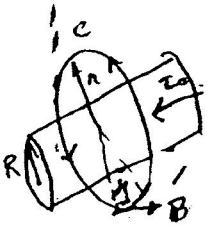
* A curva C deve ser orientada conforme a regra do saca-rolha (que bate nome) usando o sentido da corrente.

* Podemos trocar I por $\int_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS$$

Exemplo 1: Calcular campo dentro e fora de um fio infinito de raio R.

i) Para fora ($r > R$):



* DADO: as linhas de campo para um fio são círculos ao redor do fio. Em cada ponto da curva, $\vec{B}$ é tangente.

Aplicando Lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

($\vec{B}$ e $d\vec{l}$ são paralelos)

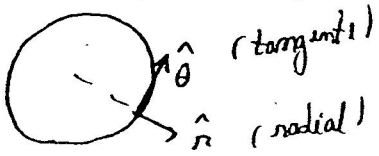
I ← corrente que passa pela superfície apoiada em c

$$B(r) \oint dl = \mu_0 I_0$$

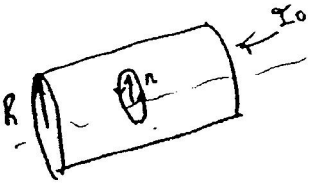
$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 I_0$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,\hat{\theta}}$$

(*)



ii) Para dentro ($r < R$)



$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$$

$B(r) \oint dl = \mu_0 \cdot ?$ ← Quem é a corrente? Não será todo I_0, pois a seção transversal só cobre parte do todo

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I_0}{\pi R^2}$$

No caso J se mantém e I' será

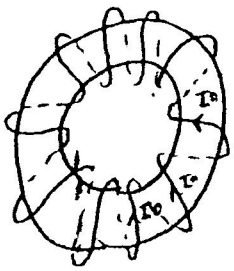
$$I' = J \cdot A' = \frac{I_0}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad B(r) \oint dl = \mu_0 \left(\frac{I_0 r^2}{R^2} \right)$$

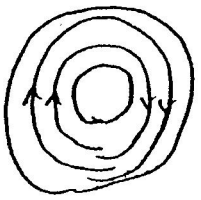
$$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 \frac{I_0 r^2}{R^2}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}\,\hat{\theta}}$$

Exemplo 2: Bobina toroidal (um donuts recoberto por N espiras-)

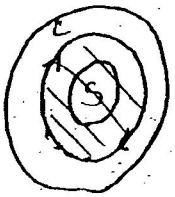


* DADO: o campo se concentra no interior do toroide e as linhas de campo são:



Note que o sentido da orientação condiz com a regra do saca rolha para cada espira com corrente I_0

Aplicando Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$



$B(r) \oint dl = \mu_0 (N I_0)$

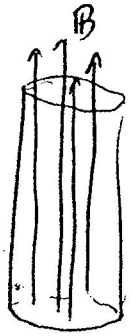
$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 N I_0$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 N I_0}{2\pi r}(-\hat{\theta})}$$

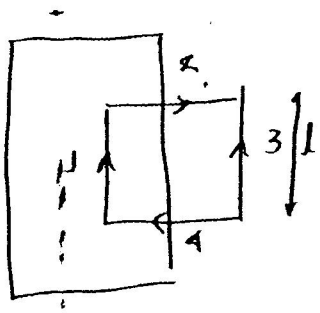
$\hat{\theta}$ é antihorário

Exemplo 3: Solenoide: tubo com espiras enroladas

* Dado: no solenoide há campo uniforme em seu interior e nenhum campo fora



Vamos tomar a seguinte curva



i) Em 2 e 4 : $\int \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$, pois $\vec{B} \perp \vec{dl}$

ii) Em 3 (fora do solenoide) : $\int \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$

iii) Em 1 (dentro)

$$\int \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{dl}}_{\text{paralelos}} = \int B \, dl = B \, l$$

⇒ Por Ampere : $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$

$$B l = \mu_0 (n \, l \, I_0)$$

$$B = \mu_0 n I_0$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I_0 \hat{k}}$$

* n = nº de enrolamentos. É quantidade de espiras por unidade de comprimento

---

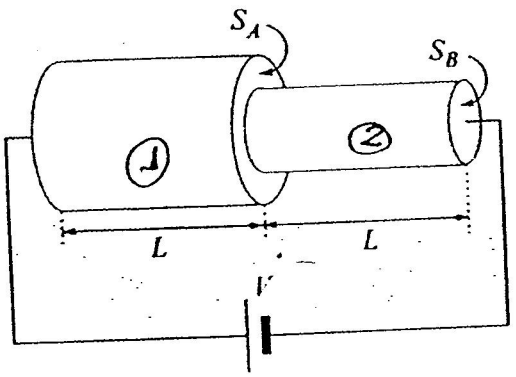
Exercícios
- Q4 : P2 2014
- Q2 : P2 2013
- Q4 : P2 2013 II + Exemplo 1
- Q4 : P2 2012

EXERCÍCIOS DE PROVAS ANTIGAS

2011 a 2014

(1) Q2 PZ 2012

Um resistor cilíndrico de comprimento $2L$ deveria ter uma seção reta S_A ao longo de todo seu comprimento e uma resistência igual a R. Devido a um erro de fabricação, metade do resistor apresenta uma seção reta $S_B = \frac{1}{5}S_A$, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Determine a resistência R' do resistor em termos do valor projetado R.

(b) (1,0 ponto) Aplica-se uma ddp de V volts nas extremidades do resistor. Calcule os módulos dos campos elétricos E_A e E_B em cada um dos trechos do resistor em termos de V e L.

a) Para o resistor projetado:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{(2L)}{S_A}$$

Para o real:

$$R' = R_1 + R_2 = \frac{\rho L}{S_A} + \frac{\rho L}{S_B}$$

$$R' = \rho L \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}S_A\right)} \right) = \rho \frac{9L}{4S_A}$$

Logo:

$$\boxed{R' = \frac{9}{8}R}$$

b) Sabemos V. Como relacionar ao campo?

$$V = \int E \cdot d\vec{l} = \underbrace{E_A \cdot L}_{\text{em (1)}} + \underbrace{E_B \cdot L}_{\text{em (2)}} \quad (I)$$

Além disso, podemos usar a lei de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

na ①: $J_A = \sigma E_A$, Mas $J_A = \frac{I}{S_A}$ → a corrente é a mesma para 1 e 2

$$\Rightarrow E_A = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{I}{S_A}$$

na ②: $J_B = \sigma E_B$, Mas $J_B = \frac{I}{S_B}$

$$\Rightarrow E_B = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{I}{S_B}$$

ividindo um pelo outro:

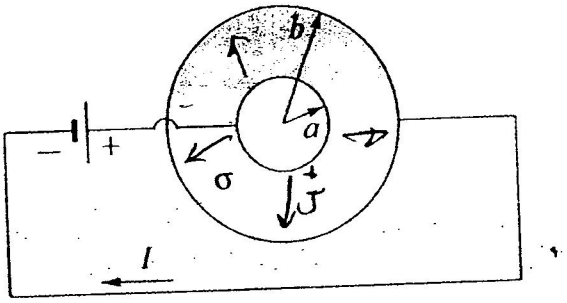
$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{S_B}{S_A} = \frac{4}{5}$$

oltando em (I): $V = \left(\frac{4}{5} E_B\right) \cdot L + E_B \cdot L$

$$\Rightarrow \boxed{E_B = \frac{5}{9}\frac{V}{L}} \text{ e } \boxed{E_A = \frac{4}{9}\frac{V}{L}}$$

(2) Q1 P2 2013

Considere dois eletrodos esféricos concêntricos de raios a e b, conforme a figura. O meio resistivo entre os eletrodos é homogêneo com condutividade σ. Uma corrente I flui do eletrodo interno de raio a para o eletrodo externo de raio b através do meio resistivo.



(a) (1,0 ponto) Calcule, em função da corrente I, o vetor densidade de corrente no meio resistivo a uma distância r do centro dos eletrodos ($a < r < b$).

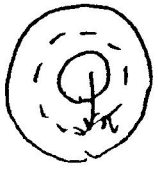
(b) (1,0 ponto) Calcule a resistência do sistema ôhmico em função de a, b e σ.

(c) (0,5 ponto) Qual o valor da diferença de potencial entre os eletrodos em função de a, b, σ e I?

a) O módulo da densidade de corrente é:

$$J = \frac{I}{A}$$

A área transversal depende da distância ao centro (r):

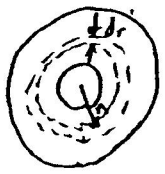


$$J = \frac{I}{A(r)} = \frac{I}{4\pi r^2}$$

Além disso, a corrente, pela figura, vai de dentro para fora

$$\therefore \boxed{\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\,\hat{r}}$$

b) Similar ao caso cilíndrico visto no resumo, podemos fazer:



$$dR = \rho \cdot \frac{dr}{A(r)}$$

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \int dR = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = -\rho \frac{1}{4\pi r}\Big|_a^b$$

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

Ou, usando $\sigma = (1/\rho)$ dado no enunciado:

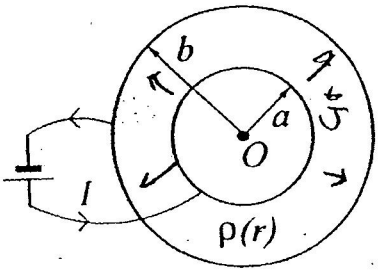
$$\boxed{R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}}$$

c) Usando a lei de ohm:

$$\boxed{V = R \cdot I \Rightarrow V = \frac{(b-a)I}{4\pi\sigma AB}}$$

(3) Q1 P2 2014

A região entre duas cascas esféricas condutoras concêntricas de raios a e b com $b > a$ é preenchida com um material de resistividade elétrica $\rho(r) = Cr^2$, onde r é a distância até o centro O das cascas esféricas e C é uma constante. Ligando-se uma bateria às cascas esféricas como na figura observa-se uma corrente I no sentido indicado.



(a) (1.0 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ na região entre as cascas $a < r < b$.

(b) (0,5 ponto) Usando a lei de Ohm, determine o vetor campo elétrico entre as cascas esféricas.

(c) (1.0 ponto) Calcule a resistência desse sistema em função de C, a e b.

a) Similar ao ex anterior (P1 2013):

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

b) Sabemos pela lei de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad \text{mas } \sigma = \frac{1}{\rho \leftarrow \text{dado}}, \text{ logo:}$$

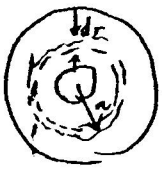
$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

$$\vec{E} = (Cr^2)\left(\frac{I}{4\pi r^2}\right)\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{CI}{4\pi}\hat{r}}$$

c) Podemos calcular R usando $V = RI$, para tanto calculamos primeiro V:

$$V = \left| \int \vec{E}\, d\vec{l} \right|$$ (rasgabanito da prova para essa solução)

Ou então, usamos o mesmo método já usado, tomando cuidado pois ρ não é constante:



$$dR = \rho \frac{dr}{A(r)}$$

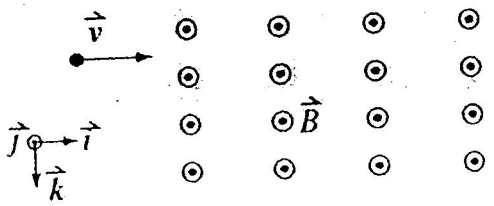
$$dR = C\pi r^2 \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \int dR = \int_a^b \frac{C\,dr}{4\pi}$$

$$\boxed{R = \frac{C(b-a)}{4\pi}}$$

(4) Q2 P2 2011

Uma partícula carregada com carga $Q > 0$ e massa M é acelerada paralelamente ao eixo x, no sentido de x crescente, a partir do repouso, por uma diferença de potencial V_0.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor velocidade final $\vec{v}$ da partícula após a aceleração pela diferença de potencial V_0.

(b) (0,5 ponto) A partícula carregada adentra a seguir numa região de campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{j}$. Determine o vetor força magnética que atua sobre a partícula em função de V_0, M, Q e B_0.

(c) (1,5 ponto) Faça um esquema do movimento dessa partícula na região de campo $\vec{B}$. Calcule o raio da trajetória na região com campo magnético e o tempo gasto nesta região.

a) O enunciado diz que a partícula ganha velocidade a partir de uma energia potencial eletrostática:

$$E_{c\,final} = E_{p\,inicial} - E_{p\,final}$$

$$\frac{MV^2}{2} = QV_0$$

$$V = \sqrt{\frac{2QV_0}{M}} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \sqrt{\frac{2QV_0}{M}}\,\hat{i}}$$

b) A força magnética é dada por:

$$\vec{F}_B = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_B = Q\sqrt{\frac{2QV_0}{M}}\,\hat{i} \times (B_0\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{F}_B = \sqrt{\frac{2Q^3V_0}{M}}\,B_0\,\vec{k}}$$

c) Como F_B é sempre ortogonal à velocidade, podemos pensar nela como uma <u>força centrípeta</u> que faz a partícula descrever uma trajetória circular.

obs: como F_B não realiza trabalho, $\vec{v}$ não muda de módulo, só de direção

Lembrando da fórmula de aceleração centrípeta:

$$F_B = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\sqrt{\frac{2q^3 V_0}{M}} \cdot B_0 = M\left(\sqrt{\frac{2qV_0}{M}}\right)^2 \cdot \frac{1}{R}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2MV_0}{q}}}$$

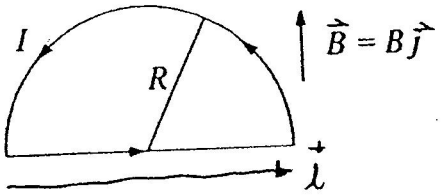
Já o tempo gasto pode ser calculado pela velocidade, que é constante em módulo:

$$V = \frac{d}{T} \Rightarrow V = \frac{\pi R}{T}$$

$$\boxed{T = \frac{\pi}{B_0}\frac{M}{q}}$$

(5) Q3 P2 2011

Um fio condutor, curvado na forma de um semicírculo de raio R, forma um circuito fechado e é percorrido por uma corrente I. O circuito está no plano xy e um campo magnético uniforme $\vec{B}$ está aplicado paralelamente ao eixo y, com é visto na figura.



(a) (0.5 ponto) Determine a força magnética total (vetor) sobre as parte retilínea do condutor.

(a) (1.0 ponto) Determine as força magnética total (vetor) sobre as parte curva do condutor.

(b) (1.0 ponto) Determine o vetor torque exercido por $\vec{B}$ sobre o circuito.

a) A força sobre o fio é dada por:

$$\vec{F}_{FIO} = I \int_{FIO} d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Como no exercício $\vec{B}$ é constante:

$$\vec{F}_{FIO} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{FIO} = I\,(2R\,\hat{\imath}) \times B\,\vec{j}$$

$\hat{\imath}$ vai do começo ao fim do fio no sentido de I

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{FIO} = 2IBR\,\vec{k}}$$

b) Poderíamos calcular novamente pela fórmula, ou lembramos que na espira: $\vec{F}_{total} = \vec{0}$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{FIO} + \vec{F}_{curva} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{curva} = -\vec{F}_{FIO}$$

$$\boxed{\vec{F}_{curva} = -2IBR\,\vec{k}}$$

c) O torque é dado por:

$$\vec{\tau} = I A \hat{n} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = I \frac{\pi R^2}{2} \vec{k} \times B \vec{j}$$

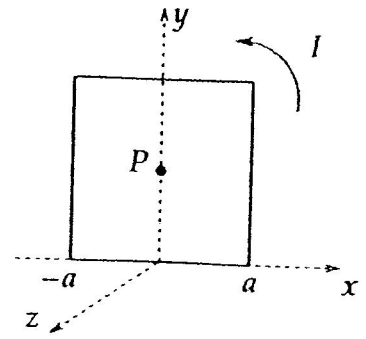
$$\boxed{\vec{\tau} = -\frac{1}{2} \pi R^2 B \vec{i}}$$

* Quem é $\hat{n}$?

Pela regra da mão direita

Q4 P2 2013 I

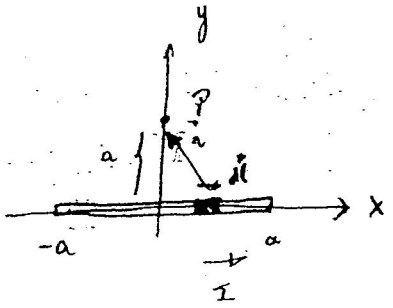
Considere uma espira quadrada de lado $2a$ percorrida no sentido anti-horário por uma corrente I. A espira se encontra no plano xy, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo segmento da espira ao longo do eixo x no centro da espira (ponto $P = (0, a, 0)$).

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético total produzido pelos quatro segmentos no centro da espira.

a)



i) $\vec{dl} = dx\,\hat{i}$ $\Rightarrow$ $\vec{dl} \wedge \vec{r} = a\,dx\,\vec{k}$

$\vec{r} = -x\vec{i} + a\vec{j}$

ii) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Fio} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{a\,dx\,\vec{k}}{(x^2 + a^2)^{3}}$$

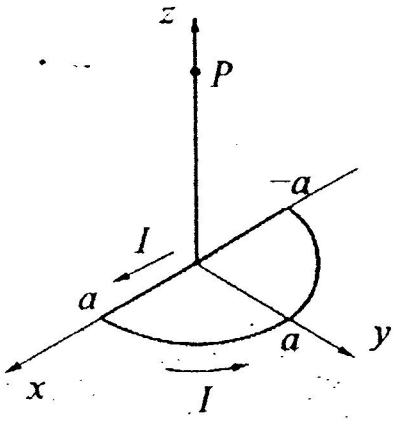
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a}\,\vec{k}}$$

b) O campo total será quatro vezes o anterior por simetria:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}\,\vec{k}}$$

Q3 P2 2014

Um circuito no plano xy formado por uma semicircunferência de raio a com centro de curvatura na origem e um trecho reto ao longo do eixo x é percorrido por uma corrente I no sentido indicado na figura.

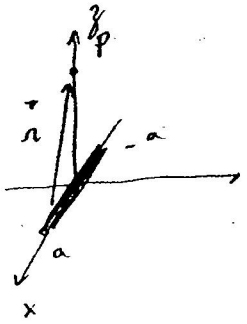


(a) (1.5 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo magnético produzido pelo trecho reto no ponto $P = (0, 0, z)$.

(b) (1.0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo magnético produzido pelo trecho de semicircunferência no ponto $P = (0, 0, z)$.

<u>Dado:</u> O elemento de linha infinitesimal na semicircunferência é $d\vec{l} = -a \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, \hat{i} + a \cos\theta\, d\theta\, \hat{j}$, onde o ângulo θ é medido a partir do eixo x.

a) Similar ao 1º exemplo de Biot - Savart



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

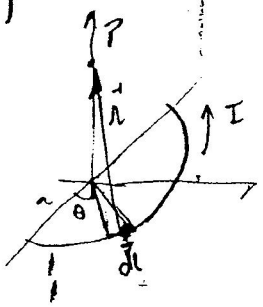
Mas: $d\vec{l} = dx\,\vec{i}$; $\vec{r} = -x\vec{i} + z\vec{k}$

$$\therefore d\vec{l} \times \vec{r} = -dx\, z\, \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{-z\,dx\,\vec{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{z\sqrt{a^2+z^2}}}$$

b)



Do enunciado: $d\vec{l} = -a\sin\theta\, d\theta\, \hat{i} + a\cos\theta\, d\theta\, \hat{j}$

Além disso: $\vec{r} = -a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j} + z\hat{k}$

De modo que $r = \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2}$

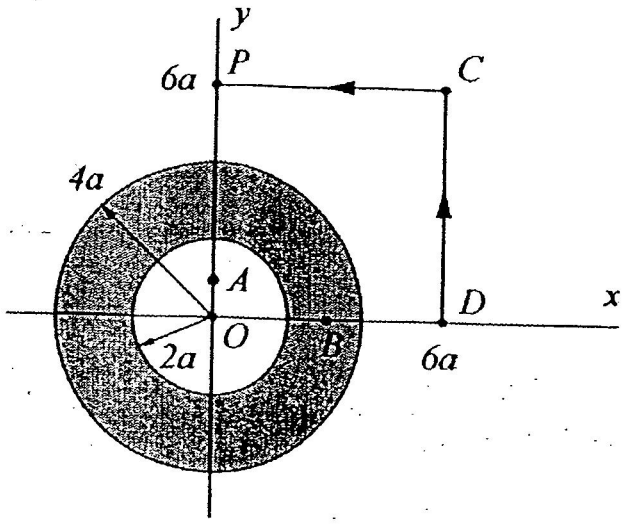
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{FIO} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{az\cos\theta\,\hat{i} + az\sin\theta\,\hat{j} + a^2\hat{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}}\, d\theta$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2az\,\hat{j} + \pi a^2 \hat{k}}{(a^2+z^2)}}$$

Q4 P2 2014

Um tubo de cobre muito longo de raio interno $2a$ e raio externo $4a$ é percorrido por uma corrente I uniformemente distribuída "saindo" da página (sentido positivo do eixo z).



(a) (1,5 pontos) Determine o vetor campo magnético em coordenadas cartesianas (isto é, na forma $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$) nos pontos $A = (0, a)$, $B = (3a, 0)$ e $C = (6a, 6a)$.

(b) (0,5 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo do caminho fechado $ODCPO$, onde $D = (6a, 0)$ e $P = (0, 6a)$, no sentido indicado.

(c) (0,5 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo do trecho DCP, no sentido indicado.

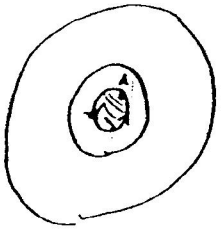
a) Tomamos curvas que passam por cada um desses pontos:

Por Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

↓ não passa corrente!

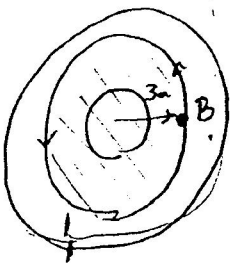
$B \oint d\vec{l} = \mu_0 \cdot 0$

$\Rightarrow B = 0$



∴ Logo $\boxed{\vec{B}(A) = \vec{0}}$

Para B



i) Pela superfície hachurada passa parte da corrente:

$$I' = J \cdot A' = \left(\frac{I}{\pi[(4a)^2-(2a)^2]}\right) \pi[(3a)^2-(2a)^2]$$

($\frac{I}{\pi[(4a)^2-(2a)^2]}$: área total; $\pi[(3a)^2-(2a)^2]$: área hachurada com corrente)

↑ SIM, são todos círculos

$$I' = \frac{I}{12a^2} \cdot 5a^2 = \frac{5}{12} I$$

ii) Por Ampère:

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot (2\pi r) = \frac{5}{12} I \mu_0$$

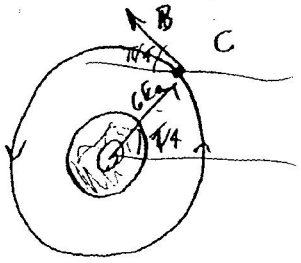
$$B \cdot 2\pi \cdot (3a) = \frac{5}{12} \mu_0 I$$

$$B = \frac{5\mu_0 I}{72\pi a}$$

Logo, em B:

$$\boxed{\vec{B}(B) = \frac{5}{72} \frac{\mu_0 I}{\pi a} \hat{j}}$$

Para C:



$\oint B\, d\vec{l} = \mu_0 I$ ← toda corrente I "passa" S

$B \oint dl = \mu_0 I$

$B(2\pi(6\sqrt{2})a) = \mu_0 I$

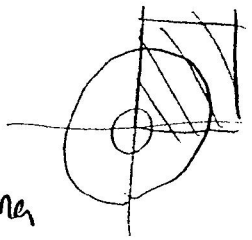
$$B = \frac{\mu_0 I}{12\sqrt{2}\pi a}$$

A direção de B em C é: $-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(C) = \frac{\mu_0 I}{24a\pi}(-\hat{i} + \hat{j})}$$

b) Por Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



Um quarto da corrente passa a superfície, logo:

$$\boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4}}$$

c) Podemos dividir o resultado anterior:

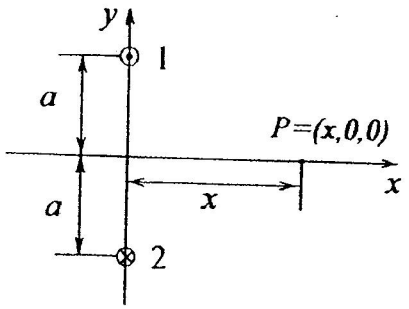
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{DCP} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_{PO} \vec{B}\, d\vec{l}}_{0} + \underbrace{\int_{OD} \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{0}$$

Nos segmentos PO e OD o campo é ortogonal ao $d\vec{l}$

$$\Rightarrow \int_{DCP} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4}$$

Q2 P2 2013

Dois fios 1 e 2, infinitos e paralelos, separados pela distância $2a$, conduzem no vácuo, cada um, uma corrente I, em sentidos opostos, conforme a figura.

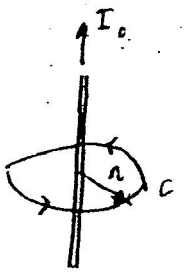


(a) (0.5 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o vetor campo magnético produzido por um fio infinito por onde passa uma corrente i a uma distância r do fio.

(b) (1.0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelos dois fios no ponto $P = (x, 0, 0)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor força por unidade de comprimento exercida no fio 2 pelo fio 1.

a)



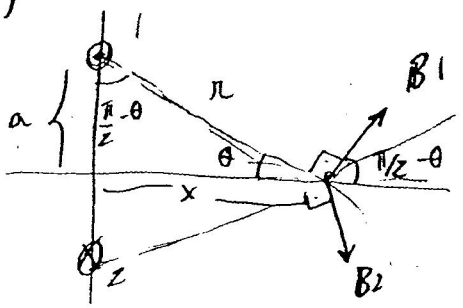
$$\oint_C \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I$$

$\vec{B} \parallel d\vec{l}$

$$B \oint dl = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\,\hat{\theta}}$$

b)



$$\vec{B}(P) = 2B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{i}$$

$$\vec{B}(P) = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{a}{r}$$

(*) Note que $\|\vec{B}_1\| = \|B_2\|$ pois tem mesma corrente e distância. Logo, anulam-se em y e só sobra em x.

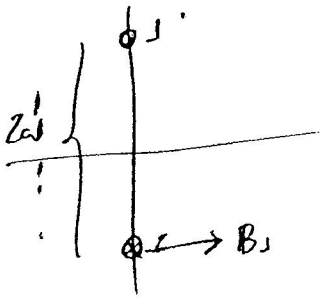
Mas $r = \sqrt{x^2 + a^2}$

$$\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)}\,\hat{i}}$$

c)

i) Qual o campo gerado por 1 em 2?

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a)} \qquad (\hat{i}) = \frac{\mu_0 I \hat{i}}{4\pi a}$$



ii) Assim, podemos usar a fórmula de força magnética sobre o fio 2.

$$\vec{F} = I \int \vec{dl} \times \vec{B}$$, em que $\vec{dl} = -dl\,\hat{k}$ (no sentido da corrente no fio 2)

$$\vec{F} = -I \int dl\,\hat{k} \times \frac{\mu_0 I \hat{i}}{4\pi a}$$

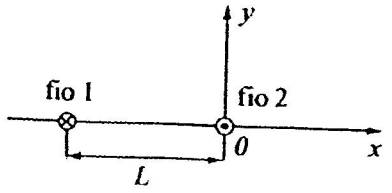
$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}\,\hat{j} \underbrace{\int dl}_{l}$$

Se quisermos a força por unidade de comprimento.

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{l} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}\,\hat{j}}$$

Q4 P2 2012

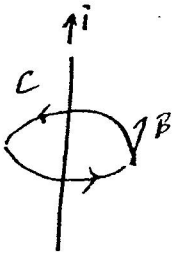
A figura abaixo mostra uma seção transversal de dois fios condutores longos (fio 1 e fio 2) estendidos paralelamente um ao outro, ao longo da direção z. Por estes fios circulam correntes i_1 e i_2, em sentidos opostos, sendo i_2 no mesmo sentido do eixo z, conforme a figura.



(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o vetor campo magnético de um fio infinito por onde passa uma corrente i.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético total devido aos dois fios mostrados na figura para um ponto qualquer do eixo x com $x > 0$.

a) Novamente



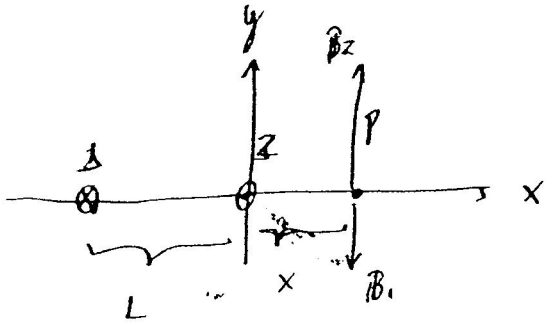
$$\oint_C \vec{B}\,d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$B \oint d\ell = \mu_0 i$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\hat{\theta}}$$

b)



$$\vec{B}(P) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi (x+L)}\,\hat{j} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi x}\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{i_2}{x} - \frac{i_1}{x+L}\right]\hat{j}}$$