NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instruções: preencha ***completamente*** *os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha* ***completamente*** *os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: ....

Assinatura: ....

Turma: ....

Professor: ....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	**Revisão**
Múltipla-escolha		
Parte discursiva		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo quatro (4) questões de múltipla-escolha (Q1-Q4) e uma parte discursiva contendo duas (2) questões (Q5 e Q6).
- As soluções das questões discursivas devem ser feitas no CADERNO DE RESPOSTAS devidamente identificado com nome, NUSP e turma.
- A parte objetiva corresponde a um total de 4,0 pontos e a parte discursiva a 6,0 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-4)

Quando necessário, use $v_{som} = 340$ m/s.

(1) [1,0 pt] Um instrumento de sopro antigo e exótico em formato de um tubo lhe é dado de presente e ao tocá-lo você é capaz de produzir frequências sucessivas de ressonância a 510, 850 e 1190 Hz. A frequência do modo fundamental desse instrumento e a natureza do seu tubo são:

- ☐ *(a)* 340 Hz, uma extremidade é aberta e a outra é fechada.
- ☐ *(b)* 340 Hz e ambas as extremidades do tubo são abertas.
- ☐ *(c)* 510 Hz, uma extremidade é aberta e a outra é fechada.
- ☐ *(d)* 170 Hz, uma extremidade é aberta e a outra é fechada.
- ☐ *(e)* 510 Hz e ambas as extremidades do tubo são abertas.

SOLUÇÃO:
Se o instrumento possui ambas as extremidades abertas, as frequências naturais são dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2\ell},$$

onde $n = 1, 2, 3, \cdots, ...$ é um inteiro positivo. Se o instrumento é possui apenas uma extremidade aberta, então suas frequências naturais são:

$$f_n = \frac{nv}{4\ell},$$

onde $n = 1, 3, 5, \cdots, ...$ é um inteiro ímpar positivo. Em ambos os casos, a diferença entre duas frequências naturais sucessivas é $\Delta f = \frac{v}{2\ell}$. Para o instrumento em questão $\frac{v}{2\ell} = 850 - 510 = 340$ Hz. Se o instrumento possuísse ambas as extremidades abertas, então todas as freqências naturais seriam múltiplos inteiros de 340 Hz, a sua frequência fundamental. Dado que 510 Hz, 850 Hz e 1190 Hz, não múltiplos de 340 Hz, essa hipótese pode ser descartada.

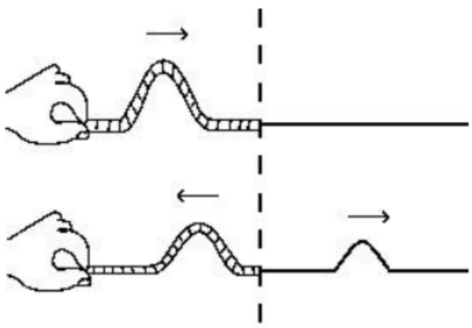
Já para um instrumento com uma extremidade aberta e a outra fechada, a frequência fundamental seria $f_1 = v/4\ell = 340/2 = 170$ Hz. Além disso, $510 = 3 \times 170$, $850 = 5 \times 170$ e $1190 = 7 \times 170$.

(2) [1,0 pt] A figura mostra duas fotografias de um pulso numa corda feita de dois materiais diferentes unidos por uma junção indicada pela linha pontilhada. A fotografia superior foi tirada antes do pulso gerado à esquerda atingir a junção e fotografia inferior, num instante posterior à chegada do pulso à junção.

Pode-se concluir que:

- ☐ *(a)* o comprimento de onda do pulso transmitido é menor que aquele da onda refletida.
- ☐ *(b)* o material à direita da junção é mais denso que o à esquerda.
- ☐ *(c)* a junção atua como uma extremidade fixa.
- ☐ *(d)* o material à esquerda da junção é mais denso que o à direita.
- ☐ *(e)* a situação é fisicamente impossível, já que os pulsos incidente e refletidos devem ter a mesma altura.

SOLUÇÃO:



Uma vez que a amplitude de reflexão, definida como a razão entre a amplitude da onda refletida e a amplitude da onda incidente é dada por (ver exercício comentado)

$$\rho = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = \frac{\sqrt{T/\mu_2} - \sqrt{T/\mu_1}}{\sqrt{T/\mu_1} + \sqrt{T/\mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}},$$

vemos da figura que $\rho > 0$, ou seja, não há inversão do pulso durante a reflexão. Conclui-se então que a corda à esquerda é mais densa que a corda à direita da junção, i.e., $\mu_1 > \mu_2$.

(3) (1,0 pt) Qual das seguintes alternativas é certa para a função

$$y(x,t) = \frac{0.8}{16x^2 + 25t^2 + 40xt + 5}$$

onde x e y estão dados em metros quando t é expressado em segundos.

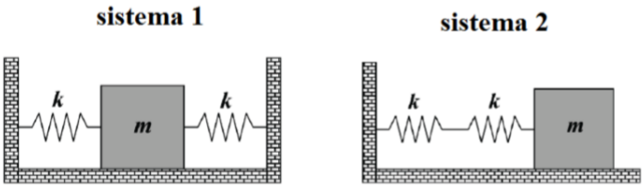
- ☐ *(a)* Em 2 s percorre uma distancia de 2,5 m.
- ☐ *(b)* A velocidade de propagação do pulso é 5 m/s.
- ☐ *(c)* $y(x,t)$ representa um pulso que se movimenta no sentido positivo do eixo x.
- ☐ *(d)* $y(x,t)$ não representa um pulso progressivo.
- ☐ *(e)* O máximo deslocamento vertical é 0,8 m.

SOLUÇÃO: A função $y(x,t)$ pode-se escrever como

$$y(x,t) = \frac{0.8}{(4x+5t)^2 + 5} = \frac{0.8}{16(x + \frac{5}{4}t)^2 + 5} = f(x + vt). \quad (1)$$

Portanto, $y(x,t)$ representa um pulso progressivo no sentido negativo do eixo x com velocidade de propagação $v = \frac{5}{4}$ m/s. Assim, após $\Delta t = 2$ s o pulso percorreu a distância $v\Delta t = \frac{5}{2}$ m/s=2,5 m/s. Pela dependência que há com x e t, o máximo deslocamento vertical corresponde com $y(x = 0, t = 0)$, obtendo $0.8/5 = 0.16$ m. Portanto, a alternativa certa é a (b).

(4) (1,0 pt) Considere dois sistemas massa-mola contendo duas molas de constante elástica k e um bloco de massa m. A razão entre a frequência natural do sistema 1 e a frequência natural do sistema 2 é:



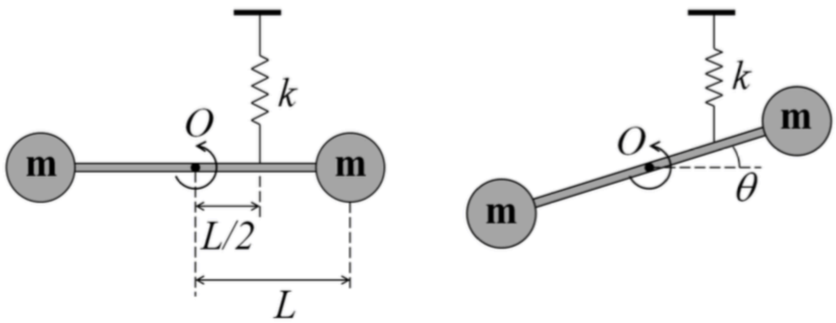
- ☐ *(a)* $\omega_1/\omega_2 = 1$.
- ☐ *(b)* $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{2}$.
- ☐ *(c)* $\omega_1/\omega_2 = 2$.
- ☐ *(d)* $\omega_1/\omega_2 = 1/\sqrt{2}$.
- ☐ *(e)* $\omega_1/\omega_2 = 1/2$.

SOLUÇÃO: Para o sistema 1, ao deslocar o bloco uma distância x da posição de equilíbrio, a mola i realiza uma força elástica $\vec{F}_i = -k_i x\hat{i}$. Assim, da segunda lei de Newton obtemos que para o sistema 1 $\ddot{x} = -\omega_1^2 x$, onde $\omega_1 = \sqrt{k_1/m + k_2/m} = \sqrt{2k/m}$, no caso $k_1 = k_2 = k$. Com as molas em série, ao aplicar uma força e deslocar o bloco, a mola 1 é deslocada da sua posição de equlíbrio em x_1 e a mola 2 em x_2. Assim, o deslocamento do bloco em relação à posição de equilíbrio é $x = x_1 + x_2$. Como o deslocamento é consequência da mesma força, temos que se k_e é uma constante elástica efetiva associada a uma mola equivalente ao sistema de duas molas em série, $x = -F/k_e$, $x_1 = -F/k_1$ e $x_2 = -F/k_2$. Assim, $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k}$ no caso $k_1 = k_2 = k$. Assim para o sistema 2 $\omega_2 = \sqrt{k_e/m} = \sqrt{k/(2m)}$ e $\omega_1/\omega_2 = 2$. A resposta correta é a (b).

QUESTÕES DISCURSIVAS

ATENÇÃO: **Justifique todas as suas respostas**

(5) [3,0 pt] Um haltere de comprimento $2L$ é formado por uma haste de massa desprezível e duas esferas de massa m. O haltere pode girar livremente em torno do ponto O, formando um ângulo θ em relação à horizontal. Uma mola, de constante elástica k está conectada a uma distância $L/2$ do ponto O e encontra-se relaxada (nem comprimida nem esticada) quando o ângulo θ é zero. Considerando pequenos valores de θ, obtenha:



(a) (1,5) A equação diferencial que rege o comportamento oscilatório do haltere.

(b) (1,5) A frequência natural de oscilação do haltere. Expresse a resposta em termos de m, k e L.

Solução:

(a) Tomando o eixo z como perpedicular ao plano de rotação do haltere e saindo da folha, para pequenos valores de θ, o torque produzido pela mola em relação ao ponto O ao longo deste eixo (perceba que com relação a O, os vetores torques devido aos pesos das massas se cancelam) é

(2) $$\vec{\tau} = -k\left(\frac{L}{2}\right)^2 \theta\,\hat{z},$$

e o momento de inércia do sistema com respeito ao eixo de rotação que passa por O é dado por

(3) $$I = 2mL^2.$$

Aplicando a segunda lei de Newton para o movimento de rotação, obtém-se:

(4) $$\tau = I\ddot{\theta} \to -k\left(\frac{L}{2}\right)^2 \theta = 2mL^2\ddot{\theta} \to 2m\ddot{\theta} + \frac{k}{4}\theta = 0.$$

(5)

(b) A partir da equação diferencial acima, a frequência angular é dada por

(6) $$\omega = \sqrt{\frac{k}{8m}}.$$

(6) [3,0 pt] Um objeto de massa M é preso a uma mola de constante elástica k. O sistema, que está sujeito à ação de uma força de amortecimento $F_a = -\rho\dot{x}$, é colocado para oscilar. Sabendo que esse oscilador harmônico amortecido tem fator de qualidade $Q = \omega_0/\gamma = 100$, e sua equação de movimento é dada por $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + 25x = 0$, determine:

(a) (1,5) A solução da equação de movimento sabendo que $\dot{x}(t = 0) = 3,0$ m s^{-1} e que a constante de fase $\varphi = 3\pi/2$.

(b) (1,0) Qual é o tempo necessário para que a amplitude do movimento se reduza à metade do valor inicial.

(c) (0,5) Esboçe um gráfico do valor médio da energia como função do tempo para uma massa $M = 2$ kg. Deixe claro as unidades adotadas.

Se necessário, use $\ln(2) \simeq 0,7$.

SOLUÇÃO:

(a) Vemos que trata-se de um oscilador em regime de amortecimento sub-crítico, já que a partir da equação diferencial de um oscilador amortecido

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

vemos que

$$\omega_0^2 = 25 \text{ rad/s} \Longrightarrow \gamma = \frac{\omega_0}{Q} = 0,05 \text{ rad/s},$$

logo

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$$

A solução geral para este regime de amortecimento é dada por

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}x(t) - \omega A\sin(\omega t + \varphi),$$

com

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{25 - \frac{0,0025}{4}} \simeq 5 \text{ rad/s}$$

Temos também que $x(0) = A\cos(3\pi/2) = 0$ e usando a condição inicial para a velocidade, temos

$$\dot{x}(0) = 3 \text{ m/s} = -\frac{\gamma}{2}x(0) - \omega A\sin(3\pi/2) = \omega A \Longrightarrow A = \frac{3}{5}\text{m},$$

logo, a solução da equação de movimento é

$$x(t) = \frac{3}{5}e^{-0,025t}\cos(5t + 3\pi/2),$$

com x em metros e t em segundos.

(b) A solução geral da equação de movimento mostra que a amplitude das oscilações, devido à dissipação introduzida pela força de amortecimento, decai exponencialmente com o tempo

$$A(t) = Ae^{-\gamma t/2},$$

de forma que quando seu valor cai à metade do valor inicial A, temos

$$\frac{A}{2} = Ae^{-\gamma t/2} \Longrightarrow t = \frac{2}{\gamma}\ln 2 = 40\ln 2 \simeq 28 \text{ s}$$

(c) No regime de amortecimento fraco ($\gamma \ll \omega_0$) que é o caso aqui, a energia média armazenada no oscilador por ciclo, e formada pelas energia potencial e cinética média, é dada por

$$\overline{E}(t) = \overline{E}(0)e^{-\gamma t},$$

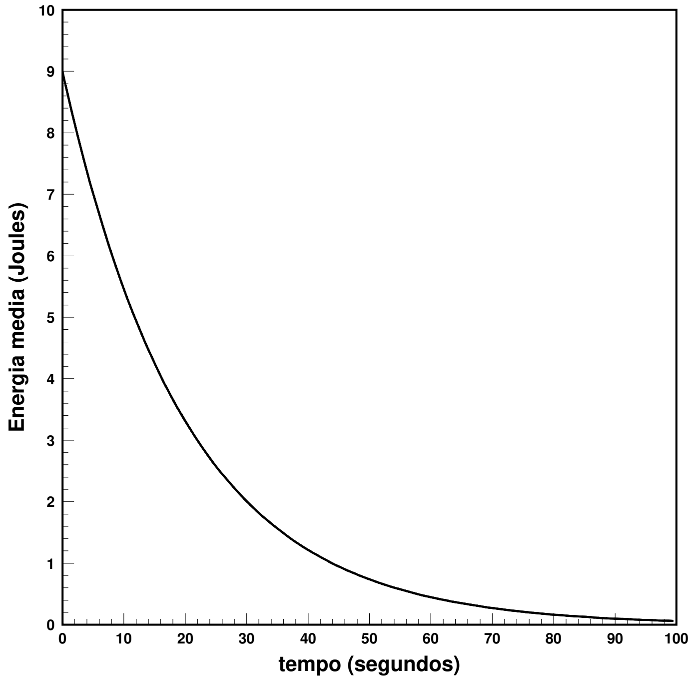
ou seja, ela decai exponecialmente com o tempo. Das condições iniciais, podemos escrever

$$\overline{E}(0) \simeq E(0) = K(0) + U(0) = \frac{1}{2}M[\dot{x}(0)]^2 = 9\,\mathrm{J}$$

Logo

$$\overline{E}(t) = 9\,e^{-0,05t}$$

com E em Joules e t em segundos.



FORMULÁRIO

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = a\cos(\Omega t) + b\,\mathrm{sen}\,(\Omega t)$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(a + bt)$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\right]$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[a\exp(\beta t) + b\exp(-\beta t)\right]$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,;\ \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,;\ \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$Q = \omega_0/\gamma$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2)}}$$

$$\varphi(\Omega) = -\mathrm{atan}\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$\overline{P}(\Omega) = \frac{\gamma F_0^2\Omega^2}{2m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2]}$$

$$\overline{E}(t) = \overline{E}(0)e^{-\gamma t} \quad (\gamma \ll \omega_0)$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\sin\beta = \frac{A_2}{A}\sin(\delta_1 - \delta_2)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{P}^2}{\rho_0 v_{som}}$$

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$$

CADERNO DE RESPOSTAS

NOME:

NUSP:

TURMA:

CADERNO DE RESPOSTAS

NOME:

NUSP:

TURMA:

CADERNO DE RESPOSTAS

NOME:

NUSP:

TURMA:

CADERNO DE RESPOSTAS

NOME:

NUSP:

TURMA: