Física II - P2 - 2016 | Paulo Akira 2016.2

→ Oscilador harmônico amortecido:

Devemos considerar o sistema bloco-mola oscilando na horizontal.

Resolvendo a Segunda Lei de Newton:

$\ddot{x}m + \rho\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\rho}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (1), com $\gamma = \frac{\rho}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

A solução para a equação diferencial (1) será do tipo $x(t) = e^{pt}$. Assim:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = pe^{pt} = px \\ \ddot{x}(t) = p^2e^{pt} = p^2x \end{cases}$$

Substituindo em (1) temos:

$p^2x + \gamma p x + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow x(p^2 + \gamma p + \omega_0^2) = 0$

Como x depende do tempo e, portanto, nem sempre será zero então devemos tomar:

$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$ $\begin{cases} p_+ = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \\ p_- = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \end{cases}$

Devido as raízes devemos dividir o problema em três casos distintos:

• Amortecimento subcrítico: $\gamma/2 < \omega_0$

$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)} = i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = i\cdot\omega$, com

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

Assim $p_+ = -\frac{\gamma}{2} + i\omega$ e $p_- = -\frac{\gamma}{2} - i\omega$.

A solução x deverá ser uma combinação linear de p_+ e p_-:

$\boxed{x(t) = C_+ \cdot e^{p_+ \cdot t} + C_- e^{p_- t}}$ (2) sendo C_+ e C_- números complexos devido ao fato de p_+ e p_- serem complexos.

Vamos escolher $C_+ = A_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ e $C_- = A_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

Substituindo em (2):

$x(t) = A_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega t} + A_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega t}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(A_1 \cdot e^{i\varphi_1 + i\omega t} + A_2 e^{i\varphi_2 - i\omega t}\right)$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(C_+ e^{i\omega t} + C_- \cdot e^{-i\omega t}\right)$

Temos quatro incógnitas $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ em uma equação diferencial de grau 2, portanto, somente dois termos são independentes.

Como $x \in \mathbb{R}$ então vamos utilizar os complexos conjugados tal que $C_- = (C_+)^* = \frac{A}{2}e^{-i\varphi}$, com A e φ dados pelas condições iniciais.

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{A}{2}e^{+i\omega t} \cdot e^{i\varphi} + \frac{A}{2} \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{-i\omega t}\right)$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}\right)$

$x(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[\cos(\omega t + \varphi) + i\,\cancel{\text{sen}(\omega t + \varphi)} + \cos(\omega t + \varphi) - i\,\cancel{\text{sen}(\omega t + \varphi)}\right]$

$x(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot 2\cos(\omega t + \varphi)$

$\boxed{x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$

Note que o deslocamento x é uma função periódica então há a ~~deslocamen~~ oscilação.

• Amortecimento supercrítico: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$p_+ = -\frac{\gamma}{2} + \beta$ e $p_- = -\frac{\gamma}{2} - \beta$, com $\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$

$p_+, p_- \in \mathbb{R} \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}$:

$x(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2}t + \beta t} + b e^{-\frac{\gamma}{2}t - \beta t}$

$\boxed{x(t) = a e^{-t\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)} + b e^{-t\left(\gamma/2 + \beta\right)}}$

• Amortecimento crítico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$

$p_+ = p_- = -\frac{\gamma}{2}$

$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} + Be^{-\frac{\gamma}{2}t} \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt)}$

~~→ x(t) = a e^{-γ/2 t}~~

Note que nos amortecimentos críticos e subcríticos não há funções periódicas e, portanto, não há oscilação.

Obs: o corpo em regime crítico chega mais rapido ao ponto de equilíbrio do que quando em regime supercrítico.

→ Oscilador harmônico forçado

Da Segunda Lei de Newton:

$m\ddot{x} + kx = F_0 \cdot \cos(\omega t)$

Devemos estender esta equação para o plano complexo

$$\begin{cases} z(t) = x(t) + i\,y(t) \\ \cos(\omega t) = e^{i\omega t} \end{cases} \therefore \boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}} \text{, com } (1)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ≡ frequência natural

A solução para a equação diferencial será da forma $z(t) = z_0 \cdot e^{i\omega t}$. Como $z_0 \in \mathbb{C}$ então $z_0 = A \cdot e^{i\varphi}$.

$z(t) = Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \therefore \ddot{z}(t) = i^2 \cdot \omega^2 \cdot Ae^{i\varphi} e^{i\omega t} =$

$= -\omega^2 \cdot Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$ (2)

Substituindo (2) em (1):

$-\omega^2 Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = F_0 \cdot e^{i\omega t}$

$\cancel{e^{i\omega t}} \cdot Ae^{i\varphi}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cdot \cancel{e^{i\omega t}}$

$Ae^{i\varphi}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m}$

$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = \frac{F_0}{m}$

Estudando a igualdade temos que

$$\begin{cases} \text{sen}\,\varphi = 0 \quad (3) \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos\varphi = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A\cos\varphi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4) \end{cases}$$

Pela relação fundamental da trigonometria e de (3):

$\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \pm 1$

Como $A > 0$ temos dois casos:

• $\omega_0 > \omega$: $\begin{cases} \cos\varphi > 0 \\ \text{sen}\,\varphi = 0 \end{cases} \therefore \begin{matrix} \cos\varphi = 1 \\ \text{sen}\,\varphi = 0 \end{matrix} \therefore \varphi = 0$

Em (4): $A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$

• $\omega_0 < \omega$: $\begin{cases} \cos\varphi < 0 \\ \text{sen}\,\varphi = 0 \end{cases} \therefore \begin{matrix} \cos\varphi = -1 \\ \text{sen}\,\varphi = 0 \end{matrix} \therefore \varphi = \pi$

$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$

Em ambos os casos temos $A = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$ (5)

Substituindo (5) na solução:

$z(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = A \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + i\,\text{sen}(\omega t + \varphi)]$

Como a força externa é regida pelo cossono então: $x(t) = \text{Re}\{z(t)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega t)$,

com $A = \frac{(F_0/m)}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$

• Em limite de baixas frequências: $\omega_0 >>> \omega$

$x(t) \cong \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2} \cdot \cos(\omega t) = \frac{(F_0/m)}{k/m} \cdot \cos\omega t =$

$= \frac{F_0}{k} \cdot \cos\omega t = \frac{F(t)}{k} \therefore F(t) = x(t) \cdot k = -F_{\text{elástica}}$

Uma força acaba por compensar a outra e não há grandes amplitudes.

• Em limite de altas frequências: $\omega >>> \omega_0$

$x(t) \cong -\frac{(F_0/m)}{\omega^2} \cos\omega t \therefore A \cong -\frac{(F_0/m)}{\omega^2} \cdot \cos\pi^{-1}$

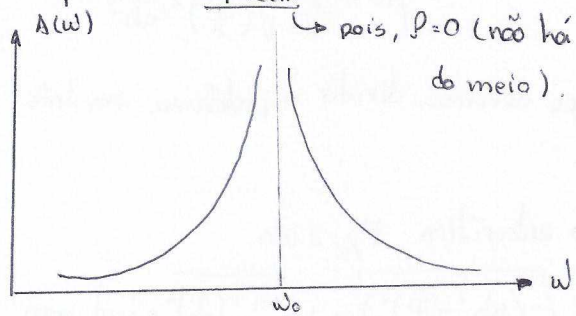
$\omega \longrightarrow \infty : A \cong 0$

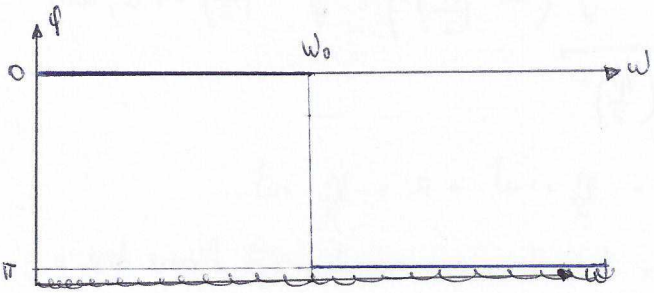
Também não há grandes amplitudes

• $\omega = \omega_0$

$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|} = A(\omega) = +\infty$, ∴ há ressonância, ou seja, as amplitudes "explodem"

↳ pois, $\beta = 0$ (não há resistência do meio).





Como a eq diferencial (1) não é homogênea ⊛ sua solução completa será:

$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega t)$

Para achar x_h basta resolver: $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$

Obs: ⊛ pois outra função depende de t.

→ Oscilador harmônico Amortecido e Forçado

Da Segunda Lei de Newton:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Vamos extender a equação diferencial para o plano complexo:

$$\begin{cases} z(t) = x(t) + i\,y(t) \\ \cos(\omega t) = e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cdot e^{i\omega t} \quad (1)$$

A solução da equação diferencial será do tipo

$z(t) = z_0 \cdot e^{i\omega t} = A e^{i\varphi} e^{i\omega t}$, pois, $z_0 \in \mathbb{C}$. ~~Su~~

$\ddot{z} = -\omega^2 z_0 \cdot e^{i\omega t}$ e $\dot{z} = i\omega z_0 \cdot e^{i\omega t}$.

Substituindo em (1):

$$-\omega^2 z_0 \cdot e^{i\omega t} + \gamma \cdot i\omega z_0 \cdot e^{i\omega t} + \omega_0^2 \cdot z_0 \cdot e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\omega t}$$

$$z_0 \cdot \cancel{e^{i\omega t}}(-\omega^2 + \gamma \cdot \omega i + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \cdot \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$z_0 = \frac{(F_0/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

$$z_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma\omega} \cdot \frac{F_0}{m}$$

$$\cancel{A e^{i(\varphi + \omega t)} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma\omega}}$$

$$\cancel{A\cos\varphi + iA\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

$$\cancel{A\cos(\varphi + \omega t) + iA\,\mathrm{sen}(\varphi + \omega t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma\omega}}$$

~~Estudando a igualdade temos que:~~

~~A cos~~

Desconsiderar

$$A e^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$A\cos\varphi + iA\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Estudando a igualdade:

$$A\cos\varphi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (2)$$

$$A\,\mathrm{sen}\,\varphi = -\frac{F_0}{m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (3)$$

De $(2)^2 + (3)^2$:

$$A^2 = (F_0/m)^2 \left[\frac{\omega_0^2 + \omega^2 + \gamma\omega}{[(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + (\gamma\omega)]^2}\right] = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} = \frac{F_0}{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (4)$$

De (3)/(2):

$$\frac{A}{A} \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Substituindo (4) na solução:

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} = A[\cos(\omega t + \varphi) + i\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)]$$

Como a força externa é do tipo cosseno:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m}\sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Como a equação diferencial (1) não é homogênea já que a força externa também depende do tempo então a solução geral será:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = a \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega' t + \phi) + A\cos(\omega t + \varphi)$$

Para achar x_h basta resolver:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Note que: x_h é a solução transitória e se torna desprezível para $t >> \tau_d = \frac{1}{\gamma}$

x_p é a solução estacionária.

- A será máximo quando $\frac{dA}{d\omega} = 0$ e, portanto, para $\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$ = frequencia de ressonância
- Longe da frequencia de ressonancia as amplitude são pequenas.
- Considerando $\gamma <<< \omega_0$ (amortecimento fraco: $\omega_R \simeq \omega_0$) e uma região próxima a $\omega_R \simeq \omega_0$ ($\omega_R - \omega_0 <<< \omega_0$):

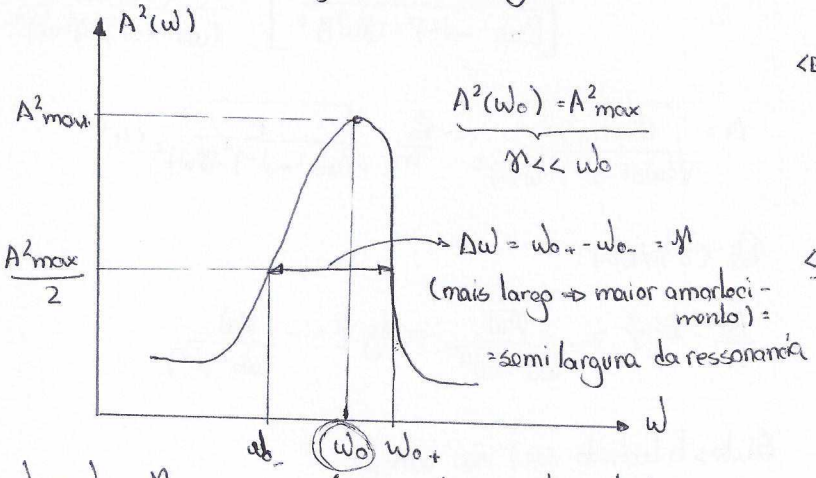
$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) = (\omega_0 + \underbrace{\omega - \omega_0}_{<<\omega_0} + \omega_0)(\omega_0 - \omega) \simeq$$

$$\simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

$$\gamma\omega = \gamma(\underbrace{\omega - \omega_0}_{<<\omega_0} + \omega_0) \simeq \gamma\omega_0$$

$$\therefore A^2(\omega) \simeq \frac{(F_0/m)^2}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\gamma}{2(\omega_0 - \omega)}$$

Curva de Breit-Wingner ou Lorentziana



$$\underbrace{A^2(\omega_0) = A^2_{max}}_{\gamma << \omega_0}$$

$\omega_- = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}$

$\omega_+ = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$

↳ quando o amortecimento é muito pequeno a frequência de ressonância é ω_0!

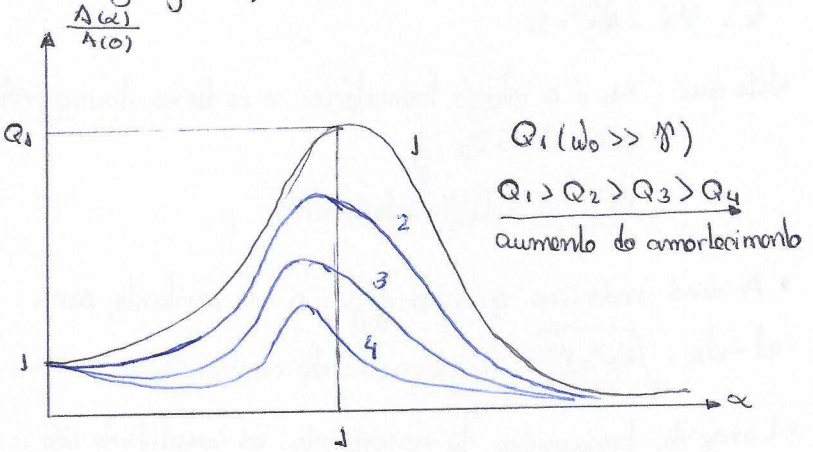
Caso o amortecimento não seja tão pequeno:

O fator de qualidade é dado por $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_0}{Q}$

Introduzimos $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega = \alpha\omega_0$ ($\alpha = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$)

Assim, $\frac{A(\alpha)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{Q^2}}}$ e $\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{-\alpha/Q}{1-\alpha^2}$

(Os fatores α e Q foram introduzidos para facilitar a representação gráfica)



$Q_1 (\omega_0 >> \gamma)$

$Q_1 > Q_2 > Q_3 > Q_4$

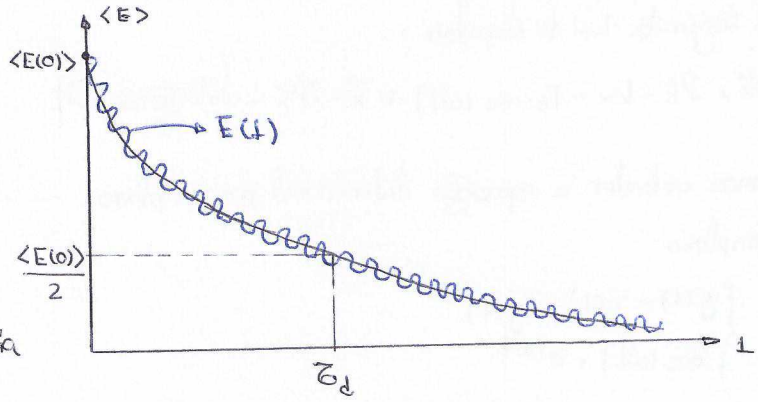
aumento do amortecimento

Ainda há ressonância mas a amplitude não é significativa e ela não ocorre na frequência natural. A freq. de ressonância dos demais será $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$

→ Considerações sobre a energia no regime subcrítico

$$\underbrace{\langle E\rangle = \frac{1}{2}kA^2}_{\text{no MHS}} \cdot \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{a energia decai, devido ao amortecimento, em forma exponencial}} = \langle E(0)\rangle \cdot e^{-\gamma t}$$

Caso $\gamma << \omega_0$: $E(t) \cong \langle E(t)\rangle = E(0)\, e^{-\gamma t}$



$\tau_d = \frac{1}{\gamma}$ = tempo de decaimento

• Energia média dissipada em um ciclo:

$\langle \Delta E\rangle = \langle E(0)\rangle e^{-\gamma t} \cdot (1 - e^{-\gamma t})$

Caso $\gamma << \omega_0$, $\gamma\tau << 1$ então $e^{-\gamma\tau} \cong 1 - \gamma\tau$:

$\langle \Delta E\rangle = \gamma\tau \langle E(0)\rangle \cdot e^{-\gamma t}$

• Fator de qualidade ou mérito:

$Q = 2\pi \cdot \frac{\langle E(t)\rangle}{\langle \Delta E\rangle} = \frac{2\pi}{\gamma\tau} = \frac{\omega}{\gamma}$, se $\gamma << \omega_0$ então

$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$

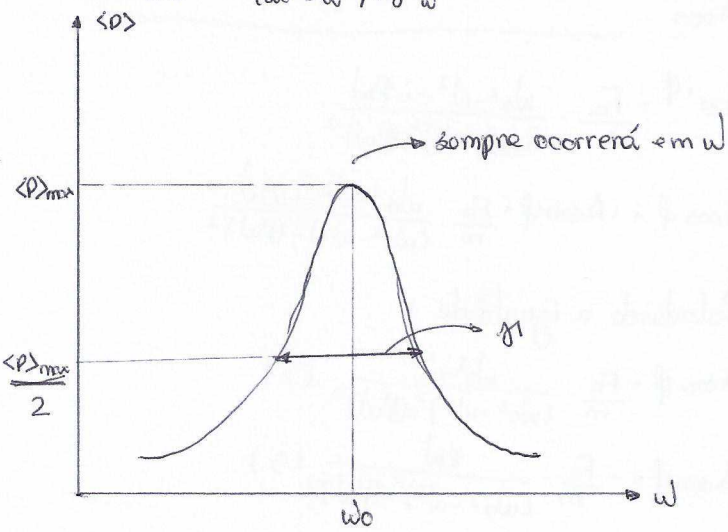
→ Considerações sobre energia no oscilador amortecido e forçado

• Como $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 0$ então para $t >> \tau_d$ não há dissipação de energia e, portanto, não há grande variações na amplitude do deslocamento de cada ciclo

$\frac{dE}{dt} = -m\gamma\dot{x}^2 + F(t)\cdot\dot{x} = P_d + P$, com P_d = potência dissipada e P = potência associada

• A potência média ~~dissipada~~ associada pode ser dada por:

$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2\gamma}{2m^2} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2}$$



sempre ocorrerá em ω_0

Se $\omega_0 >> \gamma$, a ressonância será máxima quando a força e a velocidade tiverem a mesma fase.

Se $\omega_0 >> \gamma$ (há ressonância em ω_0) e para ω perto de ω_0

$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$. No caso geral devemos usar a fórmula

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$