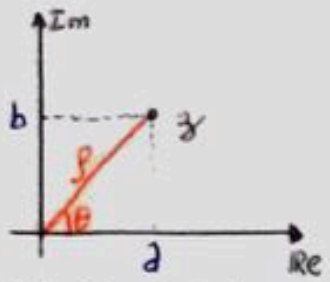
Resumo P2 - Física II (2017)

por: Mateus Fujita

Tópicos:
- Eq. de Euler (Opcional)
- Solução geral do MHS usando exponenciais (opcional)
- Movimento harmônico amortecido
- Movimento harmônico forçado
- Movimento harmônico amortecido e forçado
- Ressonância.

* Equação de Euler (Opcional)

A equação de Euler é uma equação que relaciona exponencial complexa com as coordenadas polares de um número complexo.



O número complexo é um vetor que pode ser escrito como:

$$z = a + ib = \rho\underbrace{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}_{\mathrm{cis}\,\theta}$$

Lembrando que:

$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad i^2 = -1$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ $\quad$ $\mathrm{Re}[z] = a = \rho\cos\theta$

$\mathrm{Im}[z] = b = \rho\sin\theta$

A eq. de Euler é, enfim:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Só para ter uma noção do que ela significa:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação será usada para lidar com movimentos harmônicos forçados.

* Solução geral do MHS usando exponenciais complexas (opcional)

"MHS de novo?"

Essa solução será usada para o resultado do MHA subcrítico.

Lembrando que a eq. do movimento do MHS é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Vale lembrar que, para obter a solução geral do MHS, é preciso de duas funções linearmente independentes, pois a eq. é de segunda ordem. Obtendo-as, é só fazer uma combinação linear entre elas:

$$x(t) = A x_1(t) + B x_2(t)$$

$$A(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) = 0 \qquad B(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) = 0$$

$$(A\ddot{x}_1 + B\ddot{x}_2) + \omega_0^2(Ax_1 + Bx_2) = 0$$

$$\underbrace{A\ddot{x}_1 + A\omega_0^2 x_1}_{0} + \underbrace{B\ddot{x}_2 + B\omega_0^2 x_2}_{0} = 0$$

Ao invés de usar senos e cossenos, que nem antes, iremos supor agora que a solução será do tipo: $x(t) = e^{pt}$

Para descobrir p: $x = e^{pt}$

$\ddot{x} = p^2 e^{pt}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow p^2 e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0$$

$$p^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow p = \pm i\omega_0$$

com $i^2 = -1$

E a solução geral:

$$x(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

Que é equivalente a:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

O uso desse resultado será a relação de equivalência.

* Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

⊙ Amortecimento

O amortecimento é uma força **dissipativa** proporcional à velocidade. Em geral, ela surge devido ao caráter viscoso dos fluídos.

Então:

$$F_a = \underbrace{-\rho}_{\text{dissipação}} \overbrace{\dot{X}}^{\text{velocidade}}$$

Por haver dissipação, a energia do sistema **não** é constante.

⊙ Equação diferencial do MHA

O H do MHA indica a presença de força restauradora ($F_R = -kx$) e o A de força de amortecimento. Assim, pela 2ª Lei de Newton (1D):

$$\sum \vec{F}_x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{X} + \gamma\dot{X} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{\rho}{m}$$

Obs: Nos exercícios, em geral, pede-se o coeficiente de amortecimento. Seria ele ρ ou γ?

Não tem uma distinção formal para as duas, inclusive já pediram ambas com o mesmo nome. Sugiro descobrir pela unidade, sendo $\rho = kg/s$ e $\gamma = 1/s$.

⊙ Solução geral

Ao contrário do MHS, $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$ não é uma solução direta da equação diferencial.

Nesse caso, precisamos tentar outra. Por que não exponencial?

$$X(t) = e^{pt}$$

E se dermos sorte, podemos obter duas soluções.

Lembrando que: $x(t) = e^{pt}$ $\dot{x}(t) = pe^{pt}$ $\ddot{x}(t) = p^2e^{pt}$

Aplicando na exponencial para descobrir p:

$$p^2e^{pt} + \gamma p e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0 \quad (\div e^{pt})$$

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$$

Por Bhaskara:

$$p = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}_{\Delta}}$$

Repare que os resultados de p são diferentes, dependendo do valor de Δ. Para a solução final, é necessário verificar a relação de $\frac{\gamma}{2}$ e ω_0.

$\Delta < 0$ $\qquad$ $\Delta > 0$ $\qquad$ $\Delta = 0$

- Caso subcrítico ($\frac{\gamma}{2} < \omega_0$)

O caso subcrítico a gente vai ter oscilação mais forte do que amortecimento. Nesse caso p vai ser:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$$

Com $i^2 = -1$ e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} > 0$

Assim, a solução geral será combinação linear das duas soluções particulares:

$$X(t) = A \cdot e^{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)t} + B\, e^{\left(-\frac{\gamma}{2} - i\omega\right)t}$$

$$X(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\underbrace{\left[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right]}_{\text{Sol geral do MHS}}$$

O termo destacado é a outra forma de escrever a solução geral do MHS. Lembrando que isso é equivalente a:

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t) = C\cos(\omega t + \varphi) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Por fim:

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)\right] \\ X(t) &= A' e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}}$$

Com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

sendo A, B, A' e φ constantes que dependem das condições iniciais.

- Interpretação:

Para entender esse resultado, usaremos a solução:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\varphi)$$

A expressão, em si, é parecida com a do MHS: uma amplitude multiplicada por cosseno.

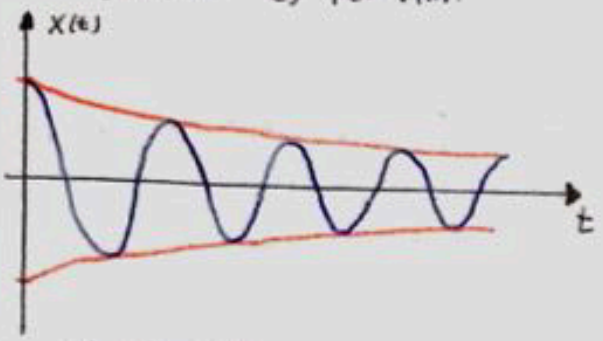
A diferença, agora é que a amplitude decresce exponencialmente, como destacado.

Outra diferença é o ω. Nesse caso a frequência angular é $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$, uma frequência menor do que ω_0. Para oscilações fracamente amortecidas, no entanto, $\omega \approx \omega_0$, pois $\gamma \ll \omega_0$. Verifique se o exercício não faz essa aproximação.

O período τ e frequência f são:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad e \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

O gráfico é, por fim:



Verificando que os pontos de máximo formam uma exponencial decrescente.

Exemplo 1 (Ex. 5 P3-2015)

Um oscilador amortecido tem frequência igual a $(0,82)^{\frac{1}{2}}$ daquela que teria (ω_0) se sua constante de amortecimento fosse nula. Nesse caso, calcule γ em função de ω_0.

Resolução:

Lembre-se que $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$

Nesse caso: $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{0,82} = \frac{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}{\omega_0}$

Assim $\frac{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}{\omega_0^2} = 0,82 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2 - 0,82\omega_0^2$

$$\frac{\gamma^2}{4} = 0,18\,\omega_0^2 \Rightarrow \gamma^2 = 2 \cdot 0,36\,\omega_0^2$$

$$\boxed{\gamma = 0,6\sqrt{2}\,\omega_0}$$

Exemplo 2 (Elaboração própria)

Em um oscilador amortecido, a sua amplitude se reduz pela metade em 10s. Sabendo que se trata de um caso subcrítico, calcule o coeficiente de amortecimento γ. Use que $\ln(2)=0,7$

Resolução:

A amplitude, como destacado em vermelho à esquerda, depende e varia com a exponencial decrescente. Assim, a amplitude, em função do tempo:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \text{ sendo } A(0)=A_0>0$$

Nesse caso $A(10) = \frac{A_0}{2}$

Assim: $A(10) = A_0 e^{-\frac{\gamma \cdot 10}{2}} = \frac{A_0}{2}$

$$e^{-\frac{\gamma}{2}10} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\ln} -\frac{\gamma}{2}\cdot 10 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Só que $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$

Assim:

$$\frac{\gamma}{2}\cdot 10 = \ln(2)$$

Usando $\ln(2)\approx 0,7$:

$$5\gamma = 0,7$$

$$\boxed{\gamma = 0,14}$$

- Condições iniciais.

A solução encontrada é geral da eq. diferencial. No entanto, é sempre pedido o $x(t)$ particular ($x(0)=x_0$ e $v(0)=v_0$) a partir das condições iniciais. Para isso:

$x(0)=x_0$ e $\dot{x}(0)=v_0$

Usando a solução $x(t)=e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A\cos(\omega t)+B\,\text{sen}(\omega t)]$

$x(0) = A = x_0 \Rightarrow A = x_0$

$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A\cos(\omega t)+B\,\text{sen}(\omega t)] + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\omega[-A\,\text{sen}(\omega t)+B\cos(\omega t)]$

$\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{2}\cdot A + B\omega = v_0$

$$B = \frac{v_0}{\omega} + \frac{x_0\gamma}{2\omega}$$

Chegando então a:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[x_0\cos(\omega t) + \left(\frac{\gamma x_0}{2\omega} + \frac{v_0}{\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right] \\ &\text{ou} \\ x(t) &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\gamma x_0}{2\omega} + \frac{v_0}{\omega}\right)^2}\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{x_0}{\frac{\gamma x_0}{2\omega} + \frac{v_0}{\omega}}\right)\right) \end{aligned}}$$

Lembrando que:

$$A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t) = C\cos(\omega t + \varphi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad e \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Obs: É sempre bom calcular a solução geral para só depois aplicar as condições iniciais.

Exemplo 3 (Elaboração própria)

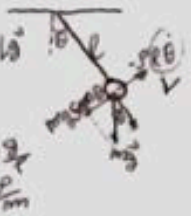
Um pêndulo simples é solto a partir do repouso de um ângulo θ_0. Sabendo que este pêndulo tem ~~oscila~~ frequência natural ω_0 de oscilação e coeficiente de amortecimento γ.

a) Escreva a eq. do movimento

b) Ache $x(t)$ para este pêndulo.

Resolução:

a. Pela 2ª Lei de Newton



$\tau_g = -mg\ell\operatorname{sen}\theta$

$\tau_r = -\rho\dot{\theta}\cdot\ell = -\rho\ell^2\dot{\theta}$

$$I\ddot{\theta} = m\ell^2\ddot{\theta} = -\underbrace{mg\operatorname{sen}\theta}_{\approx\theta} - \rho\ell^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \text{com } \omega_0^2 = \frac{g}{\ell},\ \gamma = \frac{\rho}{m}$$

b. A solução geral (supondo subcrítico) é:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

Assim:

$$\theta(0) = e^0\left[A\cos(0) + B\operatorname{sen}(0)\right] = A = \theta_0 \quad \therefore A = \theta_0$$

Agora com $\dot{\theta}$, lembrando que parte do repouso:

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)\right] + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[-A\omega\operatorname{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right]$$

$$\dot{\theta}(0) = -\frac{\gamma}{2}\cdot A + B\omega = 0 \Rightarrow B = \frac{\gamma\theta_0}{2\omega}$$

Então:

$$\theta(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\theta_0\cos(\omega t) + \frac{\gamma\theta_0}{2\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\right] \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Obs: Algo importante de se levar em conta no caso subcrítico é que é o único em que o corpo oscila. Portanto termos como "frequência de oscilação", "oscilação", etc só fazem sentido com o caso subcrítico. Vale também lembrar que é o caso que mais cai.

- Caso Super-Crítico ($\frac{\gamma}{2} > \omega_0$)

Nesse caso, o amortecimento é muito alto. Lembrando da expressão de p na ~~equa~~ solução da equação diferencial:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$$

$$\text{com } \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Lembrando que a solução geral é a combinação das particulares:

$$x(t) = Ae^{(-\frac{\gamma}{2}+\beta)t} + Be^{(-\frac{\gamma}{2}-\beta)t} \quad \therefore$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right]}$$

É o caso que menos cai (Aliás, ~~ja~~ ainda não caiu).

Exemplo 4 (Elaboração própria)

Encontre a solução particular de um oscilador sob amortecimento super crítico γ e frequência natural ω_0.

O oscilador parte da posição de equilíbrio com velocidade v_0.

Resolução:

Sabendo que a solução do caso super crítico é:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right]$$

com $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

Aplicando condições iniciais:

$$x(0) = \boxed{A + B = 0}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right] + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\beta\left[Ae^{\beta t} - Be^{-\beta t}\right]$$

$$\dot{x}(0) = \underbrace{-\frac{\gamma}{2}\left[A + B\right]}_{0} + \beta\left[A - B\right] = v_0$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{v_0}{\beta} \end{cases} \rightarrow A = \frac{v_0}{2\beta} \quad e \quad B = \frac{-v_0}{2\beta}$$

Então:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{2\beta}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right]}$$

– Caso crítico ($\frac{\gamma}{2} = \omega_0$)

Outro regime importante de amortecimento. É o caso de Amortecimento Otimizado, pois é o caso de decaimento de energia mais rápido.

A expressão de p para a solução geral:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}_{0}} = -\frac{\gamma}{2}$$

Nesse caso só ~~existe~~ encontra-se uma solução. Será fornecido que $x(t) = t \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ também é solução. Então:

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot (A + Bt)}$$

Uma informação importante do caso crítico é o fato de que $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$. Dessa relação, pode-se obter dados da frequência natural a partir dos dados de amortecimento e vice e versa.

Exemplo 5 (Elaboração própria)

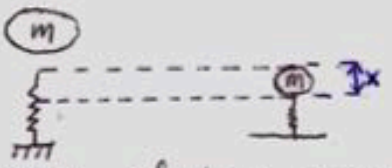
Uma massa m cai, de uma pequena altura em uma mola inicialmente relaxada. Sabe-se que, depois de um tempinho, a mola distende em x. Sabendo que esse sistema está em regime crítico de oscilação, encontre o coeficiente de amortecimento ρ em função de m, g e x.

Resolução:

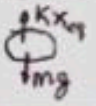
Caso crítico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$

No sistema massa-mola: $\frac{\rho^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{km}$

A situação:



A massa afunda e amortece até entrar em repouso. Isso só ocorre quando $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$, ou seja, na posição de equilíbrio:



$$kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$$

Por fim:

$$\rho = 2\sqrt{km} \quad e \quad k = \frac{mg}{x}$$

Assim:

$$\boxed{\rho = 2m\sqrt{\frac{g}{x}}}$$

Exemplo 6 (Elaboração Própria)

Ache $x(t)$ particular de uma partícula em regime criticamente amortecido de oscilação sabendo que $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = V_0$. Seu coeficiente de amortecimento é γ

Resolução.

A solução geral do caso crítico é:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt)$$

$$x(0) = A = x_0 \Rightarrow A = x_0$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt) + Be^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{2}x_0 + B = V_0 \Rightarrow B = \frac{\gamma x_0}{2} + V_0$$

Assim:

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(x_0 + \left(\frac{\gamma x_0}{2} + V_0\right)t\right)}$$

Energia no MHA

Como esevdado anteriormente, o amortecimento é uma força dissipativa. Isso é visto montando a equação da energia mecânica:

$$E = K + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{E} = \frac{m \cdot 2\dot{x}\ddot{x}}{2} + \frac{k \cdot 2x\dot{x}}{2} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

A equação do movimento é:

$$m\ddot{x} + kx = -\rho\dot{x}$$

Assim: $\boxed{\dot{E} = -\rho\dot{x}^2 = -m\gamma\dot{x}^2}$

Que é negativo

Outra fórmula importante é a energia média em função do tempo, para oscilações fracamente amortecidas ($\gamma \ll \omega_0$). É ela:

$$\boxed{\overline{E}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t}}$$

Apesar de ser uma fórmula relativamente difícil de decorar, é válido dizer que:

$$\bar{E} \propto A^2(t) = A_0^2(e^{-\gamma t})^2 = A_0^2 e^{-\gamma t}$$

Sendo então uma constante (E_0) multiplicada pela exponencial $e^{-\gamma t}$.

A constante de decaimento é o tempo que leva para uma partícula ficar com 1/e da energia inicial. No caso do MHF:

$$\bar{E}(\tau_0) = \frac{E_0}{e} = E_0 e^{-\gamma \tau_0}$$

$$e^{-1} = e^{-\gamma \tau_0}$$

$$\boxed{\tau_0 = \frac{1}{\gamma}}$$

Exemplo 7 (Elaboração da P2-2015)

6 experimentos foram feitos em regime de oscilação fracamente amortecidos. Os dados de cada um são fornecidos abaixo:

Experimento	k	ρ	m
1	k_0	ρ_0	m_0
2	$3k_0$	$2\rho_0$	m_0
3	$4k_0$	ρ_0	$2m_0$
4	k_0	ρ_0	$10m_0$
5	$k_0/2$	$6\rho_0$	$2m_0$
6	$3k_0/2$	$3\rho_0$	m_0

Dessa forma, qual deles atinge a metade da energia inicial em maior tempo?

Resolução.

Lembrando que energia mecânica média é:

$$\bar{E}(t) = E_0 e^{-\gamma t}$$

Teremos que

$$\frac{E_0}{2} = E_0 e^{-\gamma t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\gamma t}$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\gamma}$$

Nesse caso para tempos maiores precisamos de γ menores.

Considerando que $\gamma = \frac{\rho}{m_0}$

$\gamma_1 = \gamma_0$ $\quad \gamma_3 = \gamma_0/2$ $\quad \gamma_5 = 3\gamma_0$

$\gamma_2 = 2\gamma_0$ $\quad \boxed{\gamma_4 = \gamma_0/10}$ $\quad \gamma_6 = 3\gamma_0$

↳ menor

Lembrando que $\gamma = \frac{\rho}{m}$

Por fim, como no exp. 4 temos γ menor, o tempo será maior.

- O fator de Qualidade (Q)

Fator de qualidade é a razão entre a energia armazenada em um oscilador e a energia dissipada por ciclo. De uma forma geral:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\gamma}}$$

Repare que quando o Q for grande, menor será a dissipação.

Exemplo 8 (Elaboração própria)

Qual é o regime de oscilação de um oscilador com $Q = \frac{1}{2}$?

Resolução

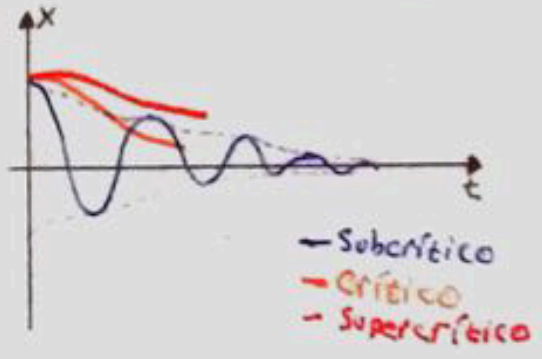
Como $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \Rightarrow \omega_0 = Q\gamma$

$\therefore$

$$\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$$

Nesse caso o oscilador estará em regime crítico

⊙ Gráficos dos 3 regimes:



* Movimento Harmônico Forçado (MHF)

Em um primeiro momento, vamos considerar a inexistência de amortecimento. Para esse movimento iremos considerar a força restauradora (do H de harmônico, $F=-kx$) e uma força externa variável, escrita na forma $sen(\Omega t)$ ou $cos(\Omega t)$:

$$F_R = -kx \quad e \quad F_{ext} = F_0 \cos(\Omega t) \quad ou$$

$$F_{ext} = F_0 \, sen(\Omega t)$$

Para efeitos de economia de folha, as contas feitas serão para o caso de cosseno, mas idênticas ao de seno.

⊙ Equação do movimento

Mais uma vez pela segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \quad e \quad \begin{array}{l} F_R = -kx \\ F_{ext} = F_0 \cos(\Omega t) \end{array}$$

Assim:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}$$

⊙ Solução particular (Estacionária).

A solução que será calculada aqui não é a geral! É a solução particular que não dá para aplicar condições iniciais.

O chute da vez para a solução da equação será: $x(t) = A\cos(\Omega t)$

$$\ddot{x}(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Assim:

$$-A\Omega^2\cos(\Omega t) + A\omega_0^2\cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) = \frac{F_0}{m}$$

Por fim:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

sendo a amplitude do MHF. A solução estacionária $[x(t)]$ é:

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Ou, caso queira deixar a amplitude sempre positiva:

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\Omega t + \phi)}{m|\omega_0^2 - \Omega^2|} \qquad \begin{array}{l} \phi = 0 \text{ se } \omega_0^2 > \Omega^2 \\ \phi = \pi \text{ se } \omega_0^2 < \Omega^2 \end{array}$$

⊙ Solução geral do MHF.

Repare que a eq. do MHF não é homogênea. A forma de achar a solução geral é um pouco diferente. Imagine x_1 e x_2 soluções das seguintes equações abaixo.

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad \text{(homogênea)}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \quad \text{(não homogênea)}$$

A solução geral será:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Visto que:

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$\underbrace{\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1}_{0} + \underbrace{\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2}_{\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)} = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Por fim, a solução geral será, lembrando que $x_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,sen(\omega_0 t)$ ou $x_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ e $x_2(t) = \frac{F_0\cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = \dfrac{F_0\cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + A\cos(\omega_0 t) + B\,sen(\omega_0 t) \\ \text{ou} \\ x(t) = \dfrac{F_0\cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + A\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{array}}$$

Exemplo 9 (Elaboração própria)

Um corpo de massa 0,25 kg está preso à uma mola de constante elástica 0,25 N/m e sofre ação da força externa $F(t) = 4\cos(3t)$. Calcule a amplitude desse movimento.

Resolução:

A amplitude, na solução estacionária, é:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Lembrando que $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{6,25}{0,25} = 25\,rad^2/s^2$

$\Omega^2 = 3^2 = 9\,(rad^2/s^2)$

$F_0 = 4\,N$

$m = 0,25\,kg$

$$A(3) = \frac{4}{0,25\cdot(25-9)} = \frac{4}{\frac{1}{4}\cdot 16} = 1,0\,m$$

Exemplo 10 (Elaboração própria)

A partir da solução geral, calcule $X(t)$ para um oscilador que, inicialmente, parte da posição de equilíbrio no repouso.

Resolução:

Posição de equilíbrio: $X(0) = 0$

Repouso: $\dot{X}(0) = 0$

Solução geral do MHF:

$$X(t) = \frac{F_0\cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2-\Omega^2)} + A\cos(\omega_0 t) + B\,sen(\omega_0 t)$$

$$X(0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\Omega^2)} + A = 0 \Rightarrow A = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2-\Omega^2)}$$

$$\dot{X}(t) = \frac{-F_0\Omega\,sen(\Omega t)}{m(\omega_0^2-\Omega^2)} + B\omega_0\cos(\omega_0 t) - A\omega_0\,sen(\omega_0 t)$$

$$\dot{X}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

Assim:

$$X(t) = \frac{F_0}{m}\cdot\left[\frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\Omega^2}\right]$$

Esse resultado será importante no tópico a seguir:

Ressonância

A amplitude dos movimentos harmônicos forçados variam com Ω ($A(\Omega)$). Em laboratório, poderia mudar essa frequência Ω. A frequência em que se consegue obter amplitude **Máxima** é chamada de frequência de ressonância. A ressonância, então, é o fenômeno em que a amplitude é máxima e a frequência externa e interna (natural) se encontram.

No caso da amplitude do MHF:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\Omega^2)}$$

Quando $\Omega \to \omega_0$, a amplitude tende a infinito. Então a frequência de ressonância do MHF é ω_0

Naturalmente, isso não quer dizer que a amplitude será infinita de verdade. Isso basicamente significa que o modelo adotado não descreve bem o que acontece nessa faixa de frequência, saindo da lei de Hooke ($F=-kx$) e etc.

Em alguns casos, é possível prever o comportamento do oscilador em ressonância (Em geral, quando parte do repouso). Caso isso aconteça, siga os passos:

1- Ache a solução geral do MHF

2- Aplique as condições iniciais do oscilador e ache $X(t)$

3- Aproxime o resultado de $X(t)$ para o limite da ressonância:

$$\lim_{\Omega\to\omega_0} X(t) = X_R(t)$$

Exemplo 11 (Parecido com uma da P3-2015 P3-2014)

Considerando um oscilador não amortecido com Força externa $F = F_0\cos(\Omega t)$ e frequência natural ω_0, calcule $X(t)$ da ressonância, assumindo que ele parte do repouso e da posição de equilíbrio.

Resolução:

1- Solução Geral:

$$X(t) = \frac{F_0\cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2-\Omega^2)} + A\cos(\omega_0 t) + B\,sen(\omega_0 t)$$

2- Solução particular (Resultado do Exemplo 10)

$$X(t) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\Omega^2}\right]$$

3- Aplicando o limite

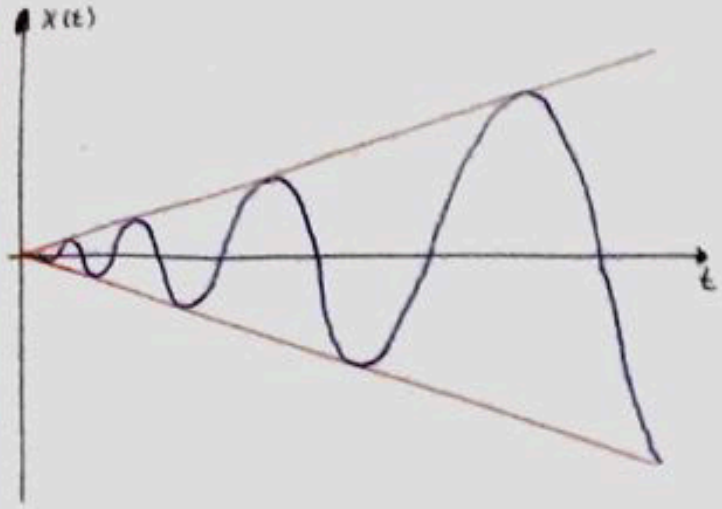
$$X_R(t) = \lim_{\Omega\to\omega_0} X(t) = \frac{F_0}{m}\lim_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2-\Omega^2}\right]$$

Como dá $\frac{0}{0}$, aplica-se L'Hospital:

$$X_R(t) = \frac{F_0}{m}\lim_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{-sen(\Omega t)\cdot t}{-2\Omega}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X_R(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}\,sen(\omega_0 t)}$$

O termo destacado é a amplitude que cresce indefinidamente e linearmente com o tempo, como mostrado no seguinte gráfico:



Repare que os pontos de máximo estão em uma reta crescente.

* Oscilação amortecida Forçada (MHAF)

Agora é só juntar tudo em um cassoulé épico (e todas as letras). Nesse caso, analisando a sigla:

M - de movimento

H - Harmônico, sinal de que tem força restauradora $F=-Kx$

A - Amortecido, então tem força dissipativa $F=-\rho\dot{x}$

F - Forçado, tendo força externa senoidal ou $F=F_0\cos(\Omega t)$

Equação do movimento

Advinha? Como tudo na Física, iremos usar a segunda Lei de Newton:

$$m\ddot{x} = -Kx - \rho\dot{x} + F_0\cos(\Omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}$$

Assim como no MHF, a equação não é homogênea. Então vamos precisar achar a solução particular e somar com a solução da homogênea para solução geral.

Solução estacionária.

Até agora não foi necessário usar a equação de euler. Agora será necessário, pois os chutes trigonométricos dão ruim.

Lembrando que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Repare que $\mathrm{Re}[e^{i\theta}] = \cos\theta$. Isso é importante, pois podemos fazer uma troca de variável, pois $\cos(\Omega t) = \mathrm{Re}[e^{i\Omega t}]$.

Dessa forma, no lugar de x, usaremos a variável complexa $z(t)$, tal que $x(t) = \mathrm{Re}[z(t)]$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

Trocando $\cos(\Omega t)$ por $e^{i\Omega t}$, x por z, $\dot{x}$ por $\dot{z}$ e $\ddot{x}$ por $\ddot{z}$.

Isso é feito pois $\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x = \mathrm{Re}[\ddot{z}+\gamma\dot{z}+\omega_0^2 z]$ e $\mathrm{Re}\left[\frac{F_0}{m}e^{i\theta}\right] = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$.

Agora um chute bom para a solução é:

$$z(t) = Ae^{i\Omega t} \qquad \dot{z} = iAe^{i\Omega t}\Omega$$

$$\ddot{z} = -A\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

Lembrando que $i^2 = -1$

Assim:

$$-A\Omega^2 e^{i\Omega t} + iA\gamma\Omega e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

E para achar A:

$$A\left[(\omega_0^2-\Omega^2) + i\gamma\Omega\right] = \frac{F_0}{m}$$ e, enfim:

$$A = \frac{F_0}{m\left[(\omega_0^2-\Omega^2)+i\gamma\Omega\right]}$$

Nesse caso, já temos $z(t)$, e para a solução estacionária seria só tirar a parte real. Mas ainda não está bom para isso. Vamos deixar A na forma:

$$A = \rho e^{i\varphi}$$ Lembrando que: $\rho = |A|$ e $\varphi = \arg[A]$

Como o complexo tá no denominador, multiplica em cima e em baixo por conjugado:

$$Z(t) = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)+i\gamma\Omega]} \cdot \frac{[(\omega_0^2-\Omega^2)-i\gamma\Omega]}{[(\omega_0^2-\Omega^2)-i\gamma\Omega]} = \frac{F_0[(\omega_0^2-\Omega^2)-i\gamma\Omega]}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2]}$$

Lembrando que, para um complexo do tipo $\alpha = C.[a+ib]$: $|\alpha| = C\sqrt{a^2+b^2}$ e

$\arg(\alpha) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Usando $a = (\omega_0^2-\Omega^2)$, $b = -\gamma\Omega$ e

$$C = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)+(\gamma\Omega)^2]}$$

$$|A| = \frac{F_0\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)+(\gamma\Omega)^2]} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$$

e

$$\arg(A) = \arctan\left(\frac{-\gamma\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right) = -\arctan\left(\frac{+\gamma\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

Por fim: $\rho = |A|$, $\varphi = \arg(A)$ e $A = \rho e^{i\varphi}$.

Como $z = Ae^{i\Omega t}$, temos:

$$Z(t) = \rho . e^{i\varphi} . e^{i\Omega t} = \rho e^{i(\Omega t+\varphi)}$$

Lembrando que $x(t) = \mathbb{R}e[z(t)]$:

$$x(t) = \mathbb{R}e\left[\rho e^{i(\Omega t+\varphi)}\right] = \rho \cos(\Omega t+\varphi)$$

Da eq. de Euler

Assim:

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0 \cos\left[\Omega t - \arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)\right]}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)+(\gamma\Omega)^2}}}$$

Sendo a Amplitude $A(\Omega)$ dada por:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$$

Ufa!

Exemplo 12 (P3-2019, Ex. 10)

Um corpo de 1 kg oscila preso a uma mola que tem uma constante elástica igual a 400 N/m. A constante de amortecimento linear vale b = 10,00 kg/s. O sistema é excitado por uma força senoidal de valor máximo igual a 10 N e frequência angular de 10 rad/s. Qual é a amplitude de oscilação?

Resolução:

A amplitude de oscilação é dada por:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)+(\gamma\Omega)^2}}$$

De acordo com os dados do problema:

$F_0 = 10{,}0\,N$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{400}{1} = 400\,s^{-1}$

$m = 1{,}0\,kg$ $\quad \Omega = 10\,s^{-1}$ e $\gamma = \frac{b}{m} = \frac{10}{1} = 10\,s^{-1}$

Assim:

$$A(10) = \frac{10\,N}{1kg.\sqrt{(400-100)^2+(10.10)^2}}\,s^{-1}$$

$$A(10) = \frac{10}{\sqrt{300^2+100^2}} = \frac{10}{\sqrt{100^2(3^2+1^2)}}$$

$$A(10) = \frac{10}{100\sqrt{10}} = \sqrt{10}/100\ m$$

Solução geral do MHAF

O que achamos foi apenas a solução particular da inomogênea. Para solução geral, é preciso somar essa solução com a solução da eq. homogênea: $\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$

Já é conhecido que:

$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A\cos(\omega t)+B\,sen(\omega t)]$ com $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$

$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A+Bt]$ com $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$

$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[Ae^{\beta t}+Be^{-\beta t}]$ com $\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$

Com $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$ e $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}$

E a solução da não homogênea:

$$x_2(t) = \frac{F_0 \cos(\Omega t+\varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}} \quad \text{com} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$$

Assim, a solução geral será $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ e a particular é obtida aplicando condições iniciais.

Exemplo 13 (Elaboração Própria)

Um oscilador possui equação do movimento: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$. Ache a solução para o ~~caso~~ caso em que ele parte do repouso e $\gamma < 2\omega_0$

Solução:

A única diferença na solução geral da força cosseno e seno é a própria função:

Cosseno

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\Omega t+\varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$$

e

Seno

$$x(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen}(\Omega t+\varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$$

Isso ocorre pois a solução complexa é a mesma, o que muda é que $x(t) = \operatorname{Im}[\rho e^{i\theta}]$ visto que $\operatorname{Im}[e^{i\theta}] = \operatorname{sen}\theta$.

Usando $A = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2]^{\frac{1}{2}}} a_0$ e $\varphi = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$

Temos que a solução geral, quando $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$:

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\Omega t+\varphi) + [a\cos(\omega t) + b\operatorname{sen}(\omega t)]e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ (subcrítico).

Das condições iniciais:

$$x(0) = A\operatorname{sen}(\varphi) + a = 0 \Rightarrow a = -A\operatorname{sen}(\varphi)$$

Calculando $\dot{x}(t)$, temos:

$$\dot{x}(t) = +A\Omega\cos(\Omega t+\varphi) + e^{-\frac{\gamma}{2}t}\omega[b\cos(\omega t) - a\operatorname{sen}(\omega t)] - \frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\ldots$$
$$\ldots[a\cos(\omega t) + b\operatorname{sen}(\omega t)]$$

Partindo do repouso:

$$\dot{x}(0) = +A\Omega\cos(\varphi) + b\omega - \frac{\gamma}{2}a = 0$$

$$b = -\left[\frac{\gamma A\operatorname{sen}(\varphi)}{2\omega} + \frac{A\Omega}{\omega}\cos(\varphi)\right]$$

Assim:

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\Omega t+\varphi) - Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\omega t) + \left(\frac{\gamma\operatorname{sen}(\varphi)}{2\omega} + \frac{\Omega\cos(\varphi)}{\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

com $A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$ e $\varphi = \arctan\left(\frac{-\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$

Ressonância no MHAF

Assim como no MHAF, ~~o MHA~~ A amplitude do MHAF sofre ressonância em uma determinada frequência Ω_R. E assim como no MHA, essa frequência será um pouquinho menor, devido ao amortecimento. Vendo a expressão da Amplitude:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$$

Poderíamos derivar $A(\Omega)$ e igualar a zero. Para facilitar as contas, usaremos a expressão que está dentro da raiz. Repare que como ela está no denominador, devemos minimizar o denominador para maximizar a amplitude.

Assim:

$$f(\Omega) = (\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (\gamma\Omega^2)^2$$

$$f'(\Omega) = -2\Omega\cdot 2(\omega_0^2-\Omega^2) + 2\gamma^2\Omega$$

Para ressonância $f'(\Omega_R) = 0$

Lembrando que $\Omega_R > 0$;

$$-2\Omega_R 2(\omega_0^2-\Omega_R^2) + 2\gamma^2\Omega_R = 0 \quad (\div 2\Omega_R)$$

$$2(\omega_0^2-\Omega_R^2)_0 = \gamma^2$$

$$\therefore$$

$$\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}}$$

E caso as oscilações sejam fracamente amortecidas:

$$\Omega_R \approx \omega_0$$

Pois $\gamma << \omega_0$

Exemplo 14 (Elaboração P3-2015)

Qual seria a frequência de ressonância caso fosse adicionada uma força externa senoidal no sistema do Exemplo 1?

Resolução:

No exemplo 1: $\omega_0 = \omega_0$

$$\gamma = 0{,}6\sqrt{2}\,\omega_0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\gamma^2}{2} = 0{,}36\,\omega_0^2$$

A frequência de ressonância seria, então:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 0{,}36\omega_0^2} = 0{,}8\,\omega_0$$

Exemplo 15 (Elaboração própria)

Calcule a amplitude de ressonância do MHAF, supondo:

a) $\gamma < \omega_0$

b) $\gamma << \omega_0$ (oscilações fracamente amortecidas)

Resolução.

Sendo:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}} \quad e \quad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+\frac{\gamma^2}{2})^2+\gamma^2(\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2})}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{\gamma^4}{4}+\gamma^2\omega_0^2-\frac{\gamma^4}{2}}}$$

$$A = \frac{F_0}{m\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}} \Rightarrow A_{max} = \frac{F_0}{m\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2/4}}$$

E quando $\gamma << \omega_0$

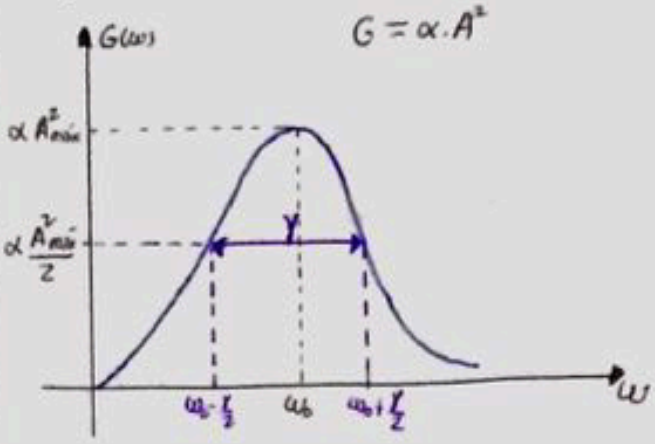
$$A_{max} = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$

Gráficos de Amplitude.

Os gráficos de ressonância são gráficos de grandezas proporcionais à amplitude elevada ao quadrado ($G(\omega) \propto A^2$), inclusive a própria amplitude ao quadrado.

Em oscilações fracamente amortecidas, é possível obter diversos dados:

$$G = \alpha . A^2$$



Lembrando que para oscilações fracamente amortecidas $\Omega_R \approx \omega_0$ e $\gamma << \omega_0$.

Balanço de Energia.

A energia mecânica instantânea é variável, porém a energia mecânica média de uma oscilação não sofre variação ($\dot{\bar{E}} = 0$). Dessa forma é possível calcular a energia por unidade de tempo média fornecida pela força externa:

Lembrando que $m\ddot{x} + kx = -m\gamma\dot{x} + F_{ext}(t)$:

$$E_m = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \dot{E} = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = -m\gamma\dot{x}^2 + F_{ext}\dot{x}$$

Pela fórmula da potência instantânea:

$$F(t).\dot{x} = P_{ot}(t)$$

Tirando a média:

$$\dot{\bar{E}} = -m\gamma\dot{\bar{x}}^2 + \bar{P}(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \bar{P}(t) = m\gamma\dot{\bar{x}}^2$$

A solução estacionária nos dá:

$$x(t) = \frac{F_0\cos(\Omega t+\varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}} \quad e \quad \dot{x}(t) = \frac{-F_0\Omega\,\mathrm{sen}(\Omega t+\varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}}$$

Assim:

$$\bar{P} = \frac{F_0^2\gamma\Omega^2}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2]} \cdot \underbrace{\overline{\mathrm{sen}^2(\Omega t+\varphi)}}_{1/2}$$

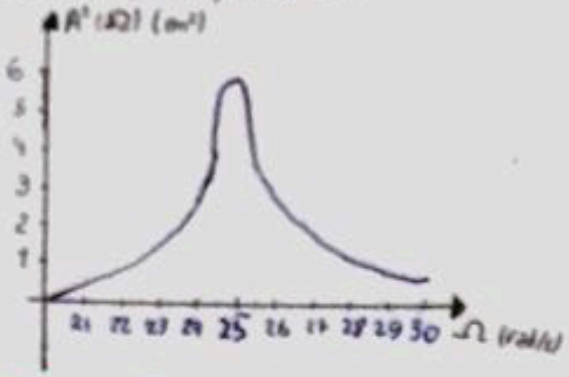
Por fim:

$$\bar{P}(\Omega) = \frac{F_0^2\gamma\Omega^2}{2m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2]}$$

Sendo positiva para compensar a perda por dissipação.

Exemplo 16 [Elaboração própria]

Dada a curva de ressonância abaixo, estime ω_0, γ e Q



Resolução:

Supondo amortecimento fraco, temos que na ressonância (Amplitude máxima):

$\Omega_R = \omega_0 = 25\,rad/s$ (no gráfico)

Traçando uma reta horizontal em $A^2 = 0{,}3\,m^2$, o ponto da esquerda bate em $\Omega = 24\,rad/s$ e o da direita em $26\,rad/s$. Assim $\gamma \approx 26 - 24 = 2\,s^{-1}$.

Por fim: $Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = 12{,}5$

Exemplo 17 (Elaboração Própria)

Calcule a frequência em que a potência média é máxima, assim como o respectivo valor dela

Resolução

Potência média: $\bar{P}(\Omega) = \dfrac{F_0^2 \Omega^2 \gamma}{2m\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2\right]}$

Derivando e igualando a 0, para máximo:

$$\bar{P}' = \frac{F_0^2\gamma}{2m}\left[\frac{2\Omega\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2\right]-\Omega^2\left[2\gamma^2\Omega-4\Omega(\omega_0^2-\Omega^2)\right]}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2\right]^2}\right] = 0$$

Lembrando que $\Omega > 0$, temos:

$$\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2\right] = \Omega\left[\gamma^2\Omega - 2\Omega(\omega_0^2-\Omega^2)\right]$$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2 = \gamma^2\Omega^2 - 2\Omega^2(\omega_0^2-\Omega^2)$$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2+2\Omega^2(\omega_0^2-\Omega^2) = 0$$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)\cdot\left[\omega_0^2-\Omega^2+2\Omega^2\right] = 0$$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)\cdot(\Omega^2+\omega_0^2) = 0$$

$$\therefore \Omega = \omega_0$$

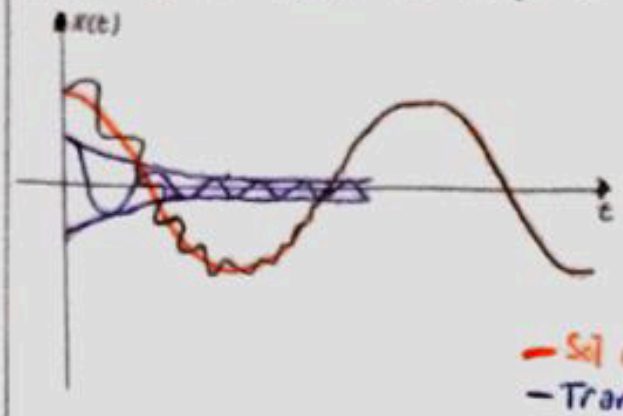
Adotando $\Omega = \omega_0$ para a amplitude máxima:

$$\bar{P}_{max}(\omega) = \frac{F_0^2\omega_0^2\gamma}{2m\left[(\omega_0^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega_0)^2\right]} = \frac{F_0^2\gamma\omega_0^2}{2m\omega_0^2\gamma^2} = \frac{F_0^2}{2m\gamma}$$

Ou $\bar{P}_{max} = \dfrac{F_0^2 Q}{2m\omega_0}$

Regimes transiente e estacionário.

No MHAF é possível observar dois tipos de oscilação ao longo do tempo:



- Sol. estacionária
- Transiente
- Sol. geral

No início do movimento, há oscilação em cima de oscilação, que vai se reduzindo ao caso estacionário, ao longo do tempo.

Isso ocorre pois o termo de MHA da solução geral:

$$x(t) = \frac{F_0\cos(\Omega t)}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(\gamma\Omega)^2}} + Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\phi)$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ e A e ϕ dependentes de condições iniciais.

ao longo do tempo vai ficando cada vez mais desprezível, devido à presença da exponencial decrescente.

Assim, para tempos muitos longos, o movimento tende à solução estacionária, enquanto, no início, o transiente pode aumentar ou reduzir as amplitudes. O transiente é, por fim: $Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\phi)$.

The End !!!

Naval Crau!!!

Boas provas !!!