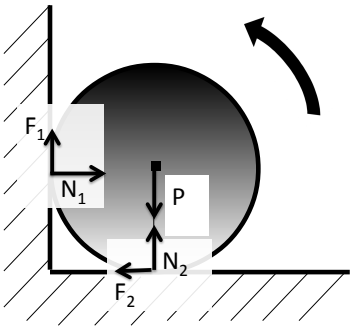
QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-4)

Respostas:
z7BA: (1) E; (2) D; (3) C; (4) A;
y2y3: (1) D; (2) A; (3) E; (4) E;
E1zy: (1) E; (2) A; (3) E; (4) E;
zGxz: (1) B; (2) C; (3) B; (4) C;

(1) [1,0] Um cilindro uniforme de raio R gira ao redor do seu eixo de simetria com velocidade angular $\vec{\omega}_0$ e é colocado no canto da parede, conforme mostrado na figura. O coeficiente de atrito dinâmico entre as paredes e o cilindro é μ e a aceleração do campo gravitacional é $\vec{g}$. Quantas voltas o cilindro dará até ele parar?

- ☐ ***(a)*** $\frac{\omega_0^2(1+\mu^2)}{8\pi\mu(1+\mu)}\frac{R}{g}$
- ☐ ***(b)*** $\frac{\omega_0^2(1+\mu^2)}{4\pi\mu(1+\mu)}\frac{R}{g}$
- ☐ ***(c)*** $\frac{\omega_0^2}{16\pi\mu}\frac{R}{g}$
- ☐ ***(d)*** $\frac{\omega_0^2(1+\mu)}{8\pi\mu(1+\mu^2)}\frac{R}{g}$
- ☐ ***(e)*** $\frac{\omega_0^2}{8\pi\mu}\frac{R}{g}$



Solução

O cilindro sofre a ação de forças de contato com o piso e a parede, além da força peso. Como o centro de massa não sofre aceleração, a somatória de forças deve se anular na horizontal e vertical, ou seja:

$$N_1 = F_2 = \mu N_2, \qquad \text{e} \qquad Mg = F_1 + N_2 = \mu N_1 + N_2$$

Temos portante que

$$F_1 = \frac{\mu^2}{\mu^2+1}Mg, \qquad \text{e} \qquad F_2 = \frac{\mu}{\mu^2+1}Mg$$

O torque combinado das forças de atrito será portanto

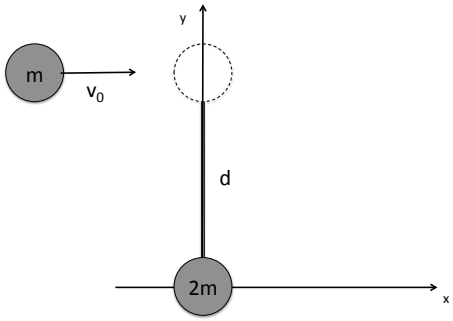
$$\tau = -(F_1 + F_2)R = \frac{MR^2}{2}\alpha$$

onde o sinal negativo corresponde ao torque oposto ao sentido de rotação. Como resultado, levará um tempo $t = \omega_0/\alpha$ até a parada do giro, implicando em uma parada após rodar por um ângulo

$$\theta = \frac{\omega_0^2(1+\mu^2)}{4\mu(1+\mu)}\frac{R}{g}.$$

Ou seja, em termos de voltas do cilindro, resposta (a)

(2) [1,0] Um cilindro maciço de raio r é lançado em uma superfície plana com velocidade $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$, como mostrado na figura, com seu eixo de simetria de rotação perpendicular à velocidade inicial, girando sobre este eixo com velocidade angular $\vec{\omega}_0$. Considerando um coeficiente de atrito não nulo, qual deve ser a velocidade angular inicial para que, após um certo tempo, o cilindro pare completamente?



- ☐ ***(a)*** $\vec{\omega} = 2\frac{v_0}{r}\hat{k}$
- ☐ ***(b)*** $\vec{\omega} = -2\frac{v_0}{r}\hat{k}$
- ☐ ***(c)*** $\vec{\omega} = -2\frac{v_0}{r}\hat{i}$
- ☐ ***(d)*** $\vec{\omega} = -\frac{v_0}{r}\hat{i}$
- ☐ ***(e)*** $\vec{\omega} = \frac{v_0}{r}\hat{k}$

Solução Para termos uma força de atrito oposta à velocidade do corpo, o sentido de giro deve ser anti-horário, portanto vetor $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. Para o movimento do centro de massa teremos a ação da resultante dada apenas pela força de atrito:

$$-F_a\hat{i} = ma\hat{i}$$

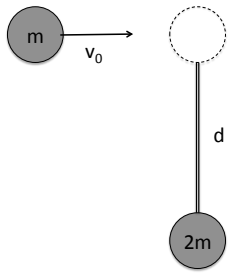
e o corpo levará um tempo $t_t = -mv_0/F_a$ para parar.

Já o torque exercido pela força de atrito implica em

$$-F_a r\hat{k} = \frac{mr^2}{2}\alpha\hat{k}$$

portanto o corpo leva um tempo $t_r = -\omega_0 mr/(2F_a)$ para parar. Igualando os dois tempos, temos a resposta (a)

(3) [1,0] Um corpo de massa m incide, com velocidade v_0, sobre um sistema formado por um corpo de massa 2m presa a uma haste de comprimento d de massa desprezível. Após a colisão, a partícula incidente fica presa à haste. Não há forças externas atuando no sistema. Após a colisão, podemos dizer que a velocidade de rotação ω do haltere formado pelas duas hastes e a energia cinética final do sistema K serão dadas por



- ☐ ***(a)*** $\omega = v_0/d$, $K = mv_0^2/2$
- ☐ ***(b)*** $\omega = 2v_0/d$, $K = mv_0^2/6$
- ☐ ***(c)*** $\omega = v_0/d$, $K = mv_0^2/6$
- ☐ ***(d)*** $\omega = 0$, $K = mv_0^2/6$
- ☐ ***(e)*** $\omega = 2v_0/d$, $K = mv_0^2/2$

Solução: O momento do centro de massa é igual ao momento inicial $\vec{p} = mv_0\hat{\imath}$. A velocidade final do centro de massa do haltere será $v_f = v_0/3$. No referencial da massa $2m$, o momento angular será $\vec{L} = -mv_0 d\,\hat{k}$.

Após a colisão, teremos um haltere, cujo centro de massa se situa em $\vec{r} = x_{CM}\hat{\imath} + \frac{m}{m+2m}d\hat{\jmath}$. O momento de inércia intrínseco no referencial do centro de massa será

$$I_{CM} = m\left(\frac{2d}{3}\right)^2 + 2m\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}md^2.$$

Por conservação do momento angular, teremos

$$\vec{L} = -mv_0 d\hat{k} = -mv_0\frac{d}{3}\hat{k} + I_{CM}\vec{\omega}$$

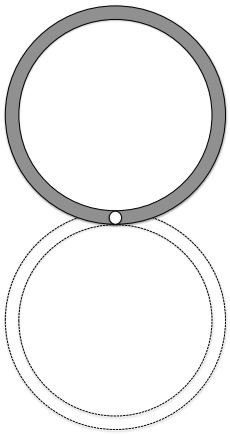
de onde temos o valor do módulo de $\omega = v_0/d$.

A energia cinética total será

$$K = \frac{m}{2}v_f^2 + \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{m}{6}v_0^2 + \frac{m}{3}v_0^2 = \frac{m}{2}v_0^2$$

Resposta (a)

(4) [1,0] Um anel delgado de massa m e raio R está preso a um eixo, como mostrado na figura. Ele cai a partir da posição mostrada. Qual a velocidade máxima do centro de massa do anel?



- ☐ ***(a)*** $\sqrt{2gR}$
- ☐ ***(b)*** $\sqrt{4gR}$
- ☐ ***(c)*** $\sqrt{gR/2}$
- ☐ ***(d)*** $\sqrt{gR}$
- ☐ ***(e)*** $\sqrt{gR/4}$

Solução: O máximo da velocidade vai ocorrer no mínimo de energia potencial. A variação de energia potencial será dada pela variação de posição do centro de massa: $\Delta U = 2mgR$.

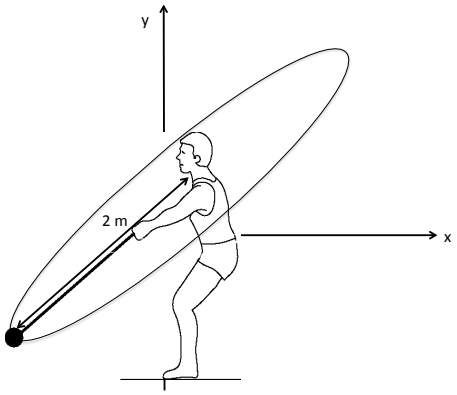
A velocidade angular pode ser obtida pela energia cinética $K = I\omega^2/2$. Considerando que o momento de inércia é igual a $I = 2mR^2$ (pelo teorema dos eixos paralelos).Neste caso $\omega = \sqrt{2g/R}$, e a velocidade linear $v = \omega R$. Portanto, resposta (a)

QUESTÕES DISCURSIVAS

ATENÇÃO: A solução dessas questões devem ser feitas no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma.

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem estar descritos nas respostas.

QD1 (3 pts) No lançamento de martelo, o atleta, com massa de 112 kg, arremessa um peso de 8 kg, depois de girá-lo 7,5 vezes. A distância do martelo ao centro de gravidade **do atleta** é de 2m.



Considerando que este atleta conseguiu fazer um arremesso parabólico, com um alcance 90 m de distância para seu lançamento perfeito, com um ângulo de arremesso de 45° (ou seja, $\pi/4$ rad), partindo de um giro como mostrado na figura. Sendo a aceleração gravitacional $g = 10m/s^2$, determine:

a) [0,5 pts] O vetor velocidade do martelo no instante do lançamento.

Solução: Para o lançamento parabólico, teremos

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t \qquad \text{e} \qquad y = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - \frac{g}{2}t^2.$$

Eliminando o tempo nas equações, e buscando a solução em $y = 0$, teremos do alcance do lançamento $v_0 = \sqrt{g * A} = \sqrt{900}m/s = 30m/s$

Lembrando que o vetor tem componentes iguais nas direções x e y, teremos

$$\vec{v}_0 = (15\sqrt{2}\hat{\imath} + 15\sqrt{2}\hat{\jmath})m/s$$

b) [0,5 pts] O vetor velocidade do atleta no instante do lançamento.

Solução: O momento inicial do sistema, antes do lançamento, é nulo, portanto o momento do martelo deve ser oposto em direção e igual em módulo ao momento do atleta.

A velocidade será, portanto:

$$\vec{v}_a = -\frac{8}{112}\vec{v}_0 = -(\frac{15}{14}\sqrt{2}\hat{\imath} + \frac{15}{14}\sqrt{2}\hat{\jmath})m/s$$

c) [1,0 pts] O vetor momento angular do conjunto atleta+martelo no instante do lançamento.

O momento angular será dado pelo produto da distância dos corpos ao centro de massa do sistema, pelo momento linear de cada corpo. Portanto é necessário calcular a posição do centro de massa. Relativo ao atleta, teremos

$$d_a = \frac{8}{8+112}2m = \frac{2}{15}m.$$

E relativo ao martelo, teremos $d_m = 28/15\,m$.

Com isso teremos

$$L = 112kg\,\frac{2}{15}m\,\frac{30}{14}\frac{m}{s} + 8kg\,\frac{28}{15}m\,30\frac{m}{s} = 480\frac{kgm^2}{s}.$$

Com a orientação, teremos

$$\vec{L} = 240\sqrt{2}(-\hat{i}+\hat{j})\frac{kgm^2}{s}.$$

d) [1,0 pts] O valor médio do vetor torque aplicado pelo ***atleta*** ao ***martelo***, considerando que o tempo para executar o arremesso é de 5,6 s.

Solução: O módulo do momento angular do martelo antes do lançamento é dado por $L_m = 8kg\,\frac{28}{15}m\,30\frac{m}{s} = 448\frac{kgm^2}{s}$. O torque médio é dado por

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{448}{5,6}\frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{i}+\hat{j})\frac{kgm^2}{s^2} = 40\sqrt{2}(-\hat{i}+\hat{j})\frac{kgm^2}{s^2}$$

Expresse seus resultados calculados a partir do referencial do centro de massa do sistema atleta-martelo antes do lançamento.

Atenção: o centro de gravidade do atleta não coincide com o centro de gravidade do sistema atleta martelo! Considere o atleta e o martelo como corpos pontuais.

Dado: $sen(\pi/4) = cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

QD2 (3 pts) Uma partícula está submetida a um potencial

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r^4}.$$

a) [0,5] Descreva de forma adequada o vetor força atuando sobre a partícula.
Solução:

$$\vec{F}(r) = -\frac{d}{dr}U(r)\hat{r} = -\frac{4\kappa}{r^5}\hat{r}$$

b) [0,5] Qual a velocidade angular para termos uma órbita circular de raio r_0?
Solução:

$$F_{cp} = ma_{cp} = -mr_0\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4\kappa}{mr_0^6}} = \frac{2}{r_0^3}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

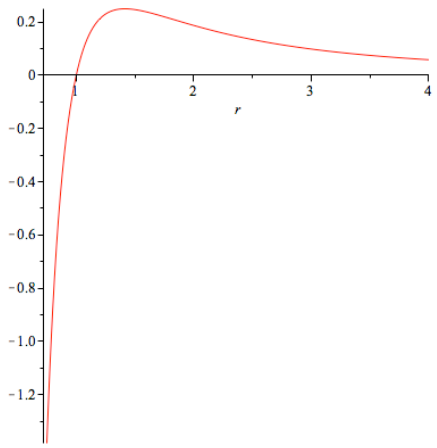
c) [0,5] Qual o momento angular do sistema nesta órbita circular?

$$L = mr_0v_\theta = mr_0^2\omega = \frac{2}{r_0}\sqrt{\kappa m}$$

d) [0,5] Escreva a expressão da energia cinética da partícula em termos de sua massa, posição, seu momento angular e sua velocidade radial.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2} + \frac{mv_r^2}{2} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mv_r^2}{2}$$

e) [0,5] Esboce o potencial efetivo da partícula em termos da distância r.



Indicar: - Máximo em $r = r_0$ - Potencial $U_{eff}(r_0) = k/r_0^4$ - Zero em $r = r_0/\sqrt{2}$

f) [0,5] Esta órbita circular é estável ou instável, mediante perturbações no raio da órbita? Justifique matematicamente sua afirmativa.

Solução: A órbita é instável. É necessário calcular a derivada segunda no ponto em que a primeira derivada se anula.

$$\frac{d^2}{dr^2}U(r) = -\frac{20\kappa}{r^6} + \frac{3L^2}{mr^4}$$

Calculado em $r = r_0$

$$\frac{d^2}{dr^2}U(r) = -\frac{20\kappa}{r_0^6} + \frac{3}{mr_0^4}\frac{4\kappa m}{r_0^2} = -\frac{8\kappa}{r_0^6} < 0.$$

Portanto, é um ponto de máximo.

FORMULÁRIO

Momentos de inércia (eixo de simetria, passando pelo centro de massa):
Anel: $I_{CM} = MR^2$; Cilindro: $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$;
Esfera: $I_{CM} = \frac{2MR^2}{5}$; Haste: $I_{CM} = \frac{M\ell^2}{12}$;
Momento de Inércia: $I = \sum m_i r_i^2$; Teorema dos eixos paralelos: $I = I_{CM} + Md^2$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\,;\ \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{int}$$

$$\vec{\tau} = m\vec{a}\,;\ \vec{p} = m\vec{v}\,;\ \ \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\,;\ \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt\,;\ \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m\left(\vec{v} + \vec{v}_{rel}\right) + \vec{F}_{ext}$$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F(\vec{r})d\vec{\ell} = K(\vec{v}_f) - K(\vec{v}_f)\,;\ \Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx\,;\ F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\,;\ K(\vec{v}) = m|\vec{v}|^2/2$$

$$\text{Potência: } P = \frac{dW}{dt}\,;\ P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$