Física para a Engenharia I - 4323101 - 3^a Prova - 27/06/2014

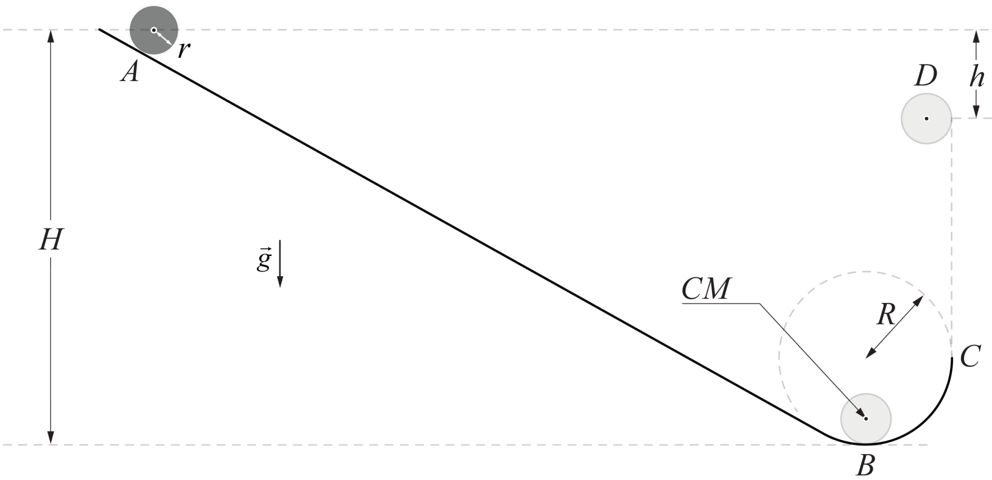
Formulário

$$\vec{v} = v_r\,\vec{e}_r + v_\theta\,\vec{e}_\theta, \quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}, \quad L = |\vec{L}| = mrv_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt}, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = I\vec{\alpha},$$

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_r^2 + U_{ef}(r), \qquad E = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + U(r)$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad I = \sum_i m_i r_i^2, \quad \vec{L} = \vec{L}_{ext} + \vec{L}_{int} = M\vec{R}_{CM}\times\vec{V}_{CM} + \vec{L}_{int}$$

Questão 1: Imagine que um objeto de perfil circular (com raio r, massa m e momento de inércia I) seja colocado no ponto A da canaleta ilustrada abaixo com velocidade inicial nula. O atrito entre esse objeto e a canaleta é suficiente para que ele role sem deslizar e a resistência do ar é desprezível.



a) (0,5) Esboce o diagrama das forças que agem sobre o objeto quando ele está no ponto A da trajetória e escreva as equações do movimento, de translação e de rotação (não é necessário resolvê-las).

b) (0,5) O ponto D da trajetória indica o ponto mais alto que o objeto atinge após ser atirado verticalmente para cima, em C. Explique em até duas linhas *legíveis* porque a velocidade angular do objeto, em torno do seu centro de massa, em C e em D são iguais.

c) (0,5) Considere os seguintes perfis de densidade para o objeto (quanto mais escuro, mais denso), todos com a mesma massa. Liste-os, em ordem **crescente** de momento de inércia.

d) (0,5) Para qual dos perfis acima o corpo sobe mais (ou seja, a distância h é *menor*)?

e) (1,0) Calcule a altura h em função dos parâmetros r, m, I, H e R.

Questão 2: Considere um sistema de cinco objetos puntiformes dispostos em um plano de acordo com a figura a seguir. Cada um dos quatro objetos periféricos possui massa igual a m, enquanto que o quinto, localizado na origem do sistema de coordenadas indicado na figura, tem massa $2m$. Eles são unidos por hastes rígidas e de massas desprezíveis.

a) (0,5) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo passando pelos objetos 2 e 3.

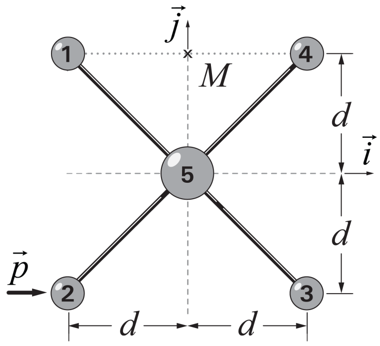
b) (0,5) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e passando pela origem.

c) (0,5) Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e passando pelo ponto M indicado na figura.

d) (0,5) O sistema, inicialmente em repouso, recebe um impulso $\vec{p}$ conforme ilustra a figura. Qual é a velocidade subsequente do centro de massa? Escreva sua resposta em função de m, d e $p = |\vec{p}|$.

e) (1,0) Ainda considerando a situação descrita no item anterior, qual é a velocidade angular do sistema, em torno de seu centro de massa, imediatamente após o impulso? Escreva sua resposta em função de m, d e $p = |\vec{p}|$.

f) (1,0) Após o impulso o sistema passa a rodar no sentido anti-horário do plano. Seja $m = 0,1$ kg e $d = 0,2$ m. Obtenha o módulo e o sentido do torque aplicado no sistema por uma força resistiva, sabendo que a velocidade angular decresce linearmente de $\omega_i = 2$ rad/s até $\omega_f = 0$ rad/s em 4 segundos.



Questão 3: Considere um projétil de massa m movimentando-se no plano x-y de um sistema de coordenadas nas situações descritas pelos itens abaixo. Adotamos nesta questão um sistema de unidades arbitrário, onde a constante gravitacional de Newton G é igual a 1. Expresse seus resultados em função de m onde for necessário.

a) (0,5) O projétil desloca-se isoladamente em movimento retilíneo uniforme. Sua posição em função do tempo é dada por

$$\vec{r}(t) = (10 - 4t)\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

onde $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são os versores dos eixos x e y, respectivamente. Qual é o módulo e o sentido do vetor momento angular do projétil com relação à origem desse sistema de coordenadas? Justifique.

Nos itens subsequentes, considere um planeta de massa $M = 20$, com $M \gg m$, fixo na origem do sistema de coordenadas. Para os itens b), c) e d), o planeta é puntiforme e a condição inicial do projétil é

$$\vec{r}(0) = 2\vec{\jmath} \qquad \text{e} \qquad \vec{v}(0) = -4\,\vec{\imath}.$$

b) (0,5) Determine o vetor momento angular e a energia total do projétil.

c) (0,75) Qual é a forma geométrica que descreve a trajetória? Justifique. **Dica:** ache o raio de equilíbrio minimizando o potencial efetivo e tire suas conclusões.

d) (0,75) Faça um esboço bem qualitativo da trajetória do projétil com relação à posição do planeta indicando, em dois pontos distintos da trajetória, as orientações dos versores das coordenadas polares.

e) (0,5) O planeta agora é uma esfera de raio R com densidade que varia radialmente de $r = 0$ a $r = R$ de acordo com

$$\rho(r) = \frac{4M}{3R^2}\left(R - \frac{r}{2}\right), \qquad \text{tal que} \qquad \int_0^R \rho(r)dr = M\,.$$

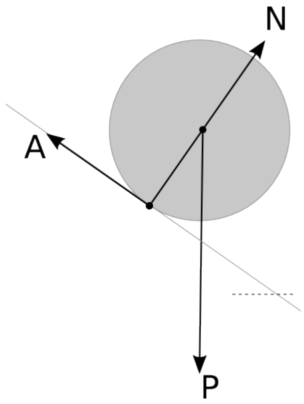
Ou seja, é mais denso em seu centro do que em sua superfície. O projétil agora encontra-se em repouso na superfície do planeta. Partindo da equação da energia total do projétil obtenha a velocidade mínima, em termos de R, para que o projétil escape para bem longe do planeta (velocidade de escape).

1 Resoluções

1a As equações do movimento são:

$$P\cos\theta - N = 0,$$
$$P\sin\theta - A = ma,$$
$$rA = I\alpha,$$

sendo P o módulo da força-peso, N o módulo da força-normal, A o módulo da força de atrito, a a aceleração linear (do CM) paralelamente ao plano, α a aceleração angular do objeto e θ o ângulo de inclinação entre o plano e a horizontal.



1b: A partir do ponto C a força de atrito, responsável pelo torque no objeto com relação ao seu centro de massa, deixa de existir. Logo, o momento angular é conservado. Como $\vec{L} = I\vec{\omega}$ e I é constante, $\vec{\omega}$ a partir do ponto C até chegar em D deve se manter inalterado.

1c: Quanto mais massa concentrada próxima ao eixo de rotação, menor o momento de inércia. Ordem dos perfis: 2, 3, 1 e 4.

1d: A menor distância h será atingida pelo perfil com a menor energia de rotação, ou seja, aquele com o menor momento de inércia—perfil 2.

1e: Colocando o zero do sistema de referência no ponto B e orientado o eixo y para cima, a energia mecânica do *objeto* nos pontos da canaleta são:

$$\begin{aligned} E_A &= mgH, \\ E_B &= mgr, \\ E_C &= mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega_C^2, \\ E_D &= mg(H-h) + \frac{1}{2}I\omega_D^2. \end{aligned}$$

Note que não precisaremos da energia em B. Utilizando a condição de não-deslizamento $v = \omega r$ e lembrando que $\omega_D = \omega_C$ (item b), as expressões de interesse podem ser reescritas assim:

$$\begin{aligned} E_A &= mgH, \\ E_C &= mgR + \frac{1}{2}(mr^2 + I)\omega_C^2, \\ E_D &= mg(H-h) + \frac{1}{2}I\omega_C^2. \end{aligned}$$

Como a força gravitacional é conservativa e a força de atrito, responsável pelo rolamento do objeto, não realiza trabalho (pois não há deslizamento), a energia mecânica é conservada. Logo, $E_A = E_C = E_D$. Para obter a altura h equalizamos as energias em A e em D:

$$E_A = E_D \Rightarrow mgH = mg(H-h) + \frac{1}{2}I\omega_C^2 \Rightarrow h = \frac{I\omega_C^2}{2mg}. \tag{1}$$

Mas ainda não conhecemos ω_C. Para isso, escrevemos

$$E_A = E_C \Rightarrow mgH = mgR + \frac{1}{2}(mr^2 + I)\omega_C^2 \Rightarrow \omega_C^2 = \frac{2mg(H-R)}{mr^2 + I}.$$

Usando este resultado em (1), obtemos a resposta desejada:

$$h = \frac{H-R}{1 + mr^2/I}.$$

2 $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 = I = m(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + 2r_5^2)$

2a $r_2 = r_3 = 0\,, \quad r_1 = r_4 = 2d \quad \Rightarrow \quad I_{23} = m(4d^2 + 0 + 0 + 4d^2 + 2d^2) = 10md^2$

2b $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = d\sqrt{2}\,, \quad r_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_5 = 4m(2d^2) = 8md^2$

2c Teorema dos eixos paralelos: $I_M = I_5 + M\ell^2$ onde I_5 é o momento de inércia do item anterior, $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 6m$ e $\ell = d$. Logo, $I_M = 8md^2 + 6md^2 = 14md^2$

2d Conservação do momento linear: $p = MV_{CM} = 6mV_{CM} \quad \Rightarrow \quad V_{CM} = p/(6m)$.

2e Há apenas transferência de momento, sem transferência de massa, ao sistema. O centro de massa mantém-se sobre o eixo x, ou seja, $\vec{R}_{CM}$ é paralelo a $\vec{V}_{CM}$. Portanto, $\vec{L}_{ext} = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} = 0$.

Conservação do momento angular: $\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{depois}$

$$\vec{L}_{antes} = dp\,\vec{k}\,, \qquad \vec{L}_{depois} = I_5\omega\,\vec{k} = 8md^2\omega\,\vec{k}\,.$$

$$\omega = \frac{p}{8md}\,.$$

2f ω decresce linearmente $\Rightarrow$ α é constante. Sendo $\Delta\vec{\omega} = -2\,\vec{k}$ rad/s e $\Delta t = 4$ s temos

$$\vec{\alpha} = -0,5 \text{ rad/s}^2\,\vec{k}\,.$$

Com os valores fornecidos para m e d temos $I = 8 \times 0,1 \times 0,04 = 0,032$ kg·m^2. Como nessa questão o torque é dado por $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ temos $\vec{M} = -0,016$ N·m $\vec{k}$.

3a Apesar do MRU, com relação à origem do sistema de coordenadas escolhido existe momento angular diferente de zero! Temos

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad \text{onde} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -4\,\vec{\imath}$$

$$\vec{L} = m\big[(10-4t)\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\big] \times (-4\vec{\imath}) = -8m(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) = -8m(-\vec{k}) = 8m\,\vec{k}\,. \tag{2}$$

3b Como somente a componente na direção $\vec{\imath}$ do vetor $\vec{r}$ mudou com relação ao item anterior, e sabendo que esta é paralela à velocidade (não contribuindo, portanto, ao momento angular), temos que o momento angular é o mesmo do item anterior, $\vec{L} = 8m\,\vec{k}$.

A energia total do projétil é

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \qquad \text{onde} \qquad v_0 = |\vec{v}(0)| = -4 \quad \text{e} \quad r_0 = |\vec{r}(0)| = 2\,.$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{16m}{2} - \frac{20m}{2} = 8m - 10m = -2m\,.$$

3c Do item anterior: $E = -2m < 0 \quad \Rightarrow$ órbita elíptica ou circular! Analisando o potencial efetivo,

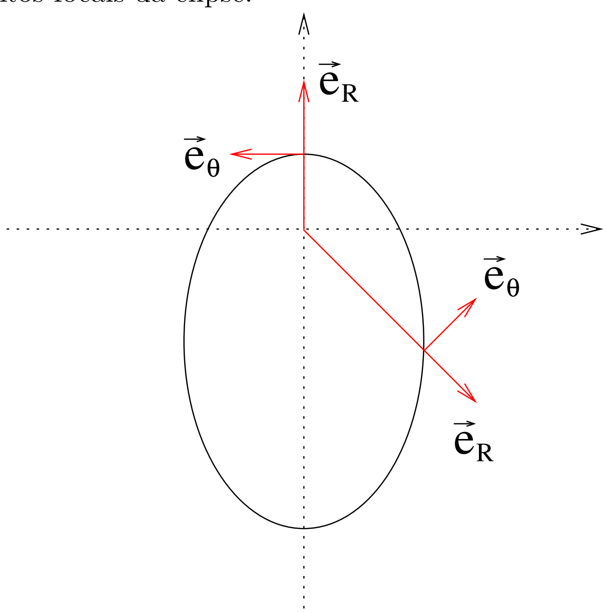
$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{64m^2}{2mr^2} - \frac{20m}{r} = m\left[\frac{32}{r^2} - \frac{20}{r}\right] = 4m\left[\frac{8}{r^2} - \frac{5}{r}\right]\,.$$

O mínimo ocorre em

$$\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r=r_{eq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2\times 8}{r_{eq}^3} + \frac{5}{r_{eq}^2} = \frac{1}{r_{eq}^3}(-16 + 5r_{eq}) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{eq} = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} = 3,2$$

Como $r_0 \neq r_{eq}$, a órbita não pode ser circular. Trata-se, portanto, de uma órbita elíptica.

3d Temos que $\vec{r}(0)$ e $\vec{v}(0)$ são perpendiculares entre si. Em uma órbita elíptica, essa situação ocorre somente nas distâncias r_{min} e r_{max}. Como $r_{eq} > r_0$, concluímos que $r_0 = r_{min}$. A origem, onde o planeta está localizado, é um dos pontos focais da elipse.



Observações mais avançadas: $r_0 = r_{min} = a(1-\epsilon)$ e $r_{eq} = b = a(1-\epsilon^2)$, onde a e b são os semi-eixos maior e menor, respectivamente, e ϵ é a excentricidade da elipse. Obtemos, portanto, $\epsilon = 0,6$ e $a = 5$.

3e A força/energia potencial gravitacional na superfície do planeta com simetria esférica não depende de sua distribuição radial, apenas de sua massa total. Logo, na superfície do planeta a energia total do projétil é

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{GMm}{R}\,.$$

A velocidade de escape é, por definição, aquela que resulta na menor energia que não limita o movimento radial, ou seja, $E = 0$. Logo,

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2 = \frac{GMm}{R} \qquad \Rightarrow \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{40}{R}}\,.$$